# IX Relativistische Mechanik

## 34 Relativitätsprinzip

*Die bisher behandelte Newtonsche Mechanik gilt nur für Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Im Teil IX stellen wir die relativistische Mechanik (auch Einsteinsche Mechanik genannt) vor; sie enthält die Newtonsche Mechanik als Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten. Die Grundlagen der relativistischen Mechanik sind zugleich die der Speziellen Relativitätstheorie von Einstein, die alle Gebiete der Physik betrifft. Diese Grundlagen werden in Kapitel 34 – 37 behandelt, die Mechanik im engeren Sinn dann in Kapitel 38 – 40.*

*In diesem Kapitel ersetzen wir das Relativitätsprinzip von Galilei durch das von Einstein, und damit die Galileitransformationen durch die Lorentztransformationen.*

Newtons Axiome sind nur in Inertialsystemen (IS) gültig, also in Systemen, die sich relativ zum Fixsternhimmel mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Dadurch sind die IS als Bezugssysteme ausgezeichnet und bevorzugt. Unter den Inertialsystemen selbst gibt es kein ausgezeichnetes System. Dies wird durch das *Relativitätsprinzip von Galilei* ausgedrückt:

1. Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.

2. Newtons Axiome gelten in allen Inertialsystemen.

Unter Gleichwertigkeit versteht man, dass alle grundlegenden physikalischen Gesetze in allen IS die gleiche Form haben. Stellvertretend für die grundlegenden Gesetze haben wir hier die Newtonschen Axiome genommen. Aus Punkt 1 und 2 folgt – wie in Kapitel 5 vorgeführt – die Galileitransformation für den Übergang zwischen verschiedenen IS. Natürlich ist Punkt 2 keine Formulierung von Galilei; denn der lebte vor Newton. Im Folgenden werden wir an Punkt 1 festhalten, den Punkt 2 aber modifizieren.

Experimente mit Licht und mit schnellen Teilchen stehen im Widerspruch zu Konsequenzen der Galileitransformationen. Unter Aufrechterhaltung von Punkt 1 des Relativitätsprinzips modifiziert die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) die Transformation zwischen verschiedenen IS so, dass sie die experimentellen Befunde richtig beschreibt. Damit werden die Galileitransformationen durch die Lorentztransformationen ersetzt.

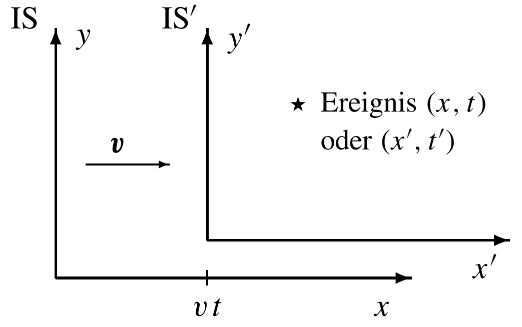



**Abbildung 34.1** Ein bestimmtes Ereignis (⋆) habe die Koordinaten $x$, $t$ im Inertialsystem IS. Welche Koordinaten $x'$, $t'$ hat dasselbe Ereignis dann in IS′, das sich relativ zu IS mit $\boldsymbol{v}$ bewegt? Die Galileitransformation zwischen $(x', t')$ und $(x, t)$ wird in der SRT durch die Lorentztransformation ersetzt.

Die *Auszeichnung* und *Gleichwertigkeit* der IS bleibt in der hier zu diskutierenden Speziellen Relativitätstheorie erhalten. Zwar verlieren die Begriffe Raum und Zeit teilweise ihre absolute Bedeutung (Kapitel 35); es bleibt aber bei einer absoluten Raum-Zeit-Struktur, die bestimmte Bezugssysteme, eben die IS, auszeichnet. Diese Auszeichnung beruht offenbar darauf, dass die IS gegenüber dem Fixsternhimmel *nicht beschleunigt* sind; dazu sei an das einfache Experiment in der Einführung zu Kapitel 5 erinnert.

Zunächst erläutern wir, an welcher Stelle ein Widerspruch zwischen der Galileitransformation und experimentellen Befunden besteht. In jedem IS seien kartesische Koordinaten $x$, $y$, $z$ und eine Zeitkoordinate $t$ definiert. Durch die Angabe von vier Werten für diese Koordinaten wird ein *Ereignis* (Kapitel 5) definiert,

$$\text{Ereignis:}\ (x,\ y,\ z,\ t) \tag{34.1}$$

Insbesondere ist eine Bahnkurve eine Folge von Ereignissen. Dasselbe Ereignis hat in zwei verschiedenen Inertialsystemen, IS und IS′, verschiedene Koordinatenwerte. Die zu diskutierende Transformation (Galilei oder Lorentz) verknüpft diese Koordinatenwerte.

Wir gehen von der speziellen Galileitransformation (5.10) aus,

$$x' = x - vt\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = t \tag{34.2}$$

Dies ist eine Transformation zwischen zwei Inertialsystemen mit parallelen Achsen und der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x$, Abbildung 34.1. Der Ursprung von IS′ fällt bei $t = t' = 0$ mit dem von IS zusammen.

Ein Photon werde zur Zeit $t = t' = 0$ vom Ursprung von IS und IS′ in $x$-Richtung ausgesandt. Als Folge von Ereignissen $(x, t)$ beziehungsweise $(x', t')$ betrachten wir die Position des Photons (oder der Wellenfront einer elektromagnetischen Welle). Das Licht bewege sich in IS′ mit der Geschwindigkeit $c$. Hierauf wenden wir eine Galileitransformation an:

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{Galileitransformation}]{x' = x - vt,\ t' = t} \qquad \frac{dx}{dt} = c + v \tag{34.3}$$

In IS hat das Licht dann die Geschwindigkeit $c + v$. Bewegt sich das Photon umgekehrt in IS mit $c$, so ergibt die Galileitransformation $c - v$ als Lichtgeschwindigkeit in IS′.

Überraschenderweise stellt man jedoch experimentell fest, dass Licht sich in IS und IS′ mit der gleichen Geschwindigkeit

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{34.4}$$

fortpflanzt. Diese Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist unvereinbar mit der „natürlichen“ Vorstellung von Raum und Zeit, die hinter (34.2) steht. Offensichtlich gilt insbesondere die aus (34.2) folgende Addition von Geschwindigkeiten nicht generell.

Wir ersetzen daher das Relativitätsprinzip von Galilei durch das *Relativitätsprinzip von Einstein*:

1. Alle IS sind gleichwertig.

2′. Licht pflanzt sich in jedem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $c$ fort.

Wir werden (34.2) so modifizieren, dass der zweite Punkt erfüllt ist. Da die betrachtete Transformation die Koordinaten beliebiger Ereignisse betrifft, gilt der zweite Punkt dann für alle Objekte (oder Folgen von Ereignissen), die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Es handelt sich daher nicht um eine spezielle Eigenschaft des Lichts, sondern um eine Revision der (34.2) zugrunde liegenden Raum-Zeit-Vorstellungen.

Die Newtonsche Mechanik und (34.2) sind experimentell gut bestätigt für Geschwindigkeiten $v \ll c$; die zu findende Lorentztransformation wird daher die Galileitransformation als Grenzfall enthalten. Entscheidende Änderungen müssen sich aber für $v \to c$ ergeben.

In den Maxwellgleichungen kommt die Lichtgeschwindigkeit $c$ als Konstante vor; diese Gleichungen ergeben daher immer die Geschwindigkeit $c$ für eine elektromagnetische Wellenfront. Nach dem Relativitätsprinzip von Galilei sind die Maxwellgleichungen damit nichtrelativistisch; dieser Meinung war auch Maxwell selbst (siehe letzter Abschnitt in Kapitel 5). Die experimentelle Befunde zur Konstanz der Lichtgeschwindigkeit legen nun nahe, die Maxwellgleichungen als relativistisch, also in allen IS gültig zu betrachten; dies ist tatsächlich der Fall. Man kann daher den Übergang von Galileis zu Einsteins Relativitätsprinzip auch so darstellen:

1. Relativitätsprinzip (RP): Alle IS sind gleichwertig.

2. Galileis RP: Newtons Axiome sind relativistisch.

2′. Einsteins RP: Maxwells Gleichungen sind relativistisch.

Aus 1 und 2 folgen die Galileitransformationen, aus 1 und 2′ die Lorentztransformationen. Wir gehen im Folgenden von Einsteins Relativitätsprinzip aus. Dies impliziert, dass Newtons Axiome abgeändert werden müssen (Kapitel 38).

**Abstand von Ereignissen**

Wir bestimmen die Transformationen, die Einsteins Relativitätsprinzip genügen, also die Lorentztransformationen. Wir betrachten zwei Ereignisse, $(t_1, x_1, y_1, z_1)$ und $(t_2, x_2, y_2, z_2)$. Durch

$$s_{12}^2 = c^2\,(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{34.5}$$

definieren wir das Quadrat $s_{12}^2$ des *Abstands* zwischen den Ereignissen. Die Größe $s_{12}^2$ kann negativ sein; etwa für zwei Ereignisse, die gleichzeitig an verschiedenen Orten stattfinden. Die Bezeichnung als „Quadrat des (vierdimensionalen) Abstands" erfolgt in Anlehnung an die entsprechende Größe (34.9) in einem kartesischen KS. Den Abstand $s_{12}$ selbst verwenden wir nur, falls $s_{12}^2 \geq 0$.

Die beiden in (34.5) betrachteten Ereignisse haben in einem anderen IS$'$ die Koordinaten $(t_1', x_1', y_1', z_1')$ und $(t_2', x_2', y_2', z_2')$. Ihr Abstand in IS$'$ ist dann

$$s_{12}'^2 = c^2\,(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 \tag{34.6}$$

Ein spezielles Ereignis 1 bestehe nun in der Emission eines Photons, das Ereignis 2 in dessen Absorption an einer anderen Stelle. Da sich das Photon in jedem IS mit der Geschwindigkeit $c$ bewegt, gilt

$$s_{12}'^2 = s_{12}^2 = 0 \tag{34.7}$$

Experimentell stellt man fest, dass

$$s_{12}'^2 = s_{12}^2 \tag{34.8}$$

auch für $s_{12}^2 \neq 0$ gilt. Dazu betrachtet man zum Beispiel ein gleichförmig bewegtes Teilchen. Für dieses Teilchen ist das Abstandsquadrat zwischen zwei Bahnpunkten gleich $s_{12}^2 = (c^2 - v^2)(t_2 - t_1)^2$. Durch die Messung der Geschwindigkeit des Teilchens in zwei verschiedenen Inertialsystemen kann man dann (34.8) verifizieren. Als Bedingung für die aufzustellende Transformation gehen wir von (34.8) aus.

Wir suchen nach den Transformationen, die die Größe (34.5) invariant lassen. Dazu erinnern wir an die orthogonalen Transformationen, die den Übergang zwischen kartesischen Koordinatensystemen beschreiben, die relativ zueinander gedreht sind. Die Bedingung für diese Transformationen ist die Invarianz des dreidimensionalen Abstands, also

$$\begin{aligned} l_{12}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 \;=\; l_{12}'^2 \end{aligned} \tag{34.9}$$

Die Lösung ist bekannt: Für eine Drehung muss die Transformation linear sein ($x' = \alpha\, x$). Die Bedingung (34.9) ergibt dann $\alpha^{\mathrm{T}} \alpha = 1$. Dies legt $\alpha$ bis auf drei Drehwinkel fest. Die Bestimmung der gesuchten Lorentztransformation erfolgt in sehr ähnlicher Weise.

**Lorentztransformation**

Zur Vereinfachung der Schreibweise nummerieren wir die Raum-Zeit-Koordinaten $x^\alpha$ von 0 bis 3:

$$(x^\alpha) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (c\,t,\ x,\ y,\ z) \tag{34.10}$$

Ob die Indizes oben oder unten an der indizierten Größe angebracht werden, ist an sich eine willkürliche Festsetzung. In Kapitel 36 werden wir aber die unten indizierten Größen $x_\alpha$ etwas anders definieren. Griechische Indizes sollen immer von 0 bis 3 laufen. Wir definieren noch die zweifach indizierte Größe $\eta_{\alpha\beta}$ durch

$$\eta = (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{34.11}$$

Damit schreiben wir den Abstand $ds$ zwischen zwei infinitesimal benachbarten Ereignissen als

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \equiv \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{34.12}$$

Die Größe $ds$ heißt (vierdimensionales) *Wegelement*. Im letzten Schritt haben wir die *Summenkonvention* eingeführt: Über zwei gleiche Indizes, von denen der eine oben und der andere unten steht, wird summiert. Im Folgenden schreiben wir das Summenzeichen nicht mehr an.

Die Bedingung (34.8) muss für beliebige Abstände erfüllt sein, also auch für $ds$,

$$ds^2 = ds'^2 \tag{34.13}$$

Hieraus folgt unmittelbar die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Inertialsystem:

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{Lorentztransformation}]{c^2dt'^2 - dx'^2 = c^2dt^2 - dx^2} \qquad \frac{dx}{dt} = c \tag{34.14}$$

Wir stellen nun die Transformation auf, die die Bedingung (34.13) erfüllt. Diese Transformation stellt die Beziehung zwischen den Koordinaten $x^\alpha$ und $x'^\alpha$ desselben Ereignisses in IS und IS$'$ her. Wir setzen sie als *lineare* Transformation an:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_{\ \beta}\, x^\beta + b^\alpha \qquad \text{(Lorentztransformation)} \tag{34.15}$$

Die Größen $\Lambda^\alpha_{\ \beta}$ und $b^\alpha$ hängen von der Relation zwischen IS und IS$'$ ab, nicht aber von den Koordinaten. Die Beschränkung auf eine lineare Transformation folgt aus der Homogenität von Raum und Zeit: Bei einer nichtlinearen Transformation würden die Koeffizienten $\Lambda^\alpha_{\ \beta}(x)$ von den Koordinaten $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ abhängen.

Dann wäre die Transformation hier anders als dort und heute anders als morgen. Dies widerspräche aber der Homogenität von Raum und Zeit.

Man kann (34.15) auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \tag{34.16}$$

schreiben. Mit dem Spaltenvektor $x = (x^\beta)$ und der Matrix $\Lambda = (\Lambda^\alpha_{\ \beta})$ wird dies kurz zu $x' = \Lambda x + b$; dabei ist der obere Index von $\Lambda^\alpha_{\ \beta}$ der Zeilenindex, der untere der Spaltenindex.

Da $\Lambda$ und $b$ nicht von den Koordinaten abhängen, gilt

$$dx'^\beta = \Lambda^\beta_{\ \alpha}\, dx^\alpha \tag{34.17}$$

Hiermit werten wir die Invarianz $ds^2 = ds'^2$ aus,

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha\, dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta}\, \Lambda^\alpha_{\ \gamma}\, \Lambda^\beta_{\ \delta}\, dx^\gamma dx^\delta \stackrel{!}{=} ds^2 = \eta_{\gamma\delta}\, dx^\gamma\, dx^\delta \tag{34.18}$$

Da die Invarianz für beliebige $dx$ gelten soll, folgt

$$\Lambda^\alpha_{\ \gamma}\, \Lambda^\beta_{\ \delta}\, \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \quad \text{oder} \quad \Lambda^{\mathrm{T}} \eta\, \Lambda = \eta \tag{34.19}$$

Dies entspricht der Bedingung $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = 1$ bei orthogonalen Transformationen.

## Spezielle Lorentztransformation

Für Drehungen und räumliche oder zeitliche Verschiebungen ergeben sich keine Unterschiede zwischen Galilei- und Lorentztransformationen. Das Relativitätsprinzip von Galilei und das von Einstein implizieren gleichermaßen die Isotropie und Homogenität des Raums und die Homogenität der Zeit, also zum Beispiel die Gleichwertigkeit von Inertialsystemen mit verschieden orientierten Achsen. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf die Relativbewegung zwischen zwei IS. Alle hierfür relevanten Ergebnisse lassen sich im Rahmen der speziellen Anordnung von Abbildung 34.1 finden. Für diesen Fall bestimmen wir die Lorentztransformation.

Zur Zeit $t = 0$ sollen sich die Systeme IS und IS$'$ in Abbildung 34.1 decken; zu diesem Zeitpunkt werde die Uhr in IS$'$ ebenfalls auf null gestellt ($t' = 0$). Das Ereignis, das durch die Koinzidenz der Ursprünge von IS und IS$'$ gegeben ist, hat dann die Koordinaten $(c\,t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ und $(c\,t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$. Wir setzen diese Koordinaten in (34.15) ein und erhalten

$$b^\alpha = 0 \tag{34.20}$$

In IS kann an jeder Stelle $x$ eine zur $y$-Achse (oder $z$-Achse) parallele Achse angebracht werden. Damit kann immer eine dieser parallelen Achsen mit der momentanen $y'$-Achse zur Deckung gebracht werden, so dass

$$y' = y\,, \qquad z' = z \tag{34.21}$$

gilt. Gesucht ist dann nur noch die Transformation zwischen $x$, $t$ und $x'$, $t'$. Sie kann nicht von den $y$- oder $z$-Koordinaten abhängen, da die Anordnung bezüglich dieser Richtungen homogen ist. Das $\Lambda$ der speziellen Lorentztransformation (LT) ist daher von der Form

$$\Lambda = \big(\Lambda_\alpha^{\ \beta}\big) = \begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 0} & 0 & 0 \\ \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{34.22}$$

Dieses $\Lambda$ muss (34.19) erfüllen. Außerdem muss der Ursprung von IS$'$, $x' = 0$, in IS die $x$-Koordinate $x = vt$ haben. Die Position des Ursprungs von IS$'$ kann als Folge von Ereignissen aufgefasst werden. Die Koordinaten dieser Ereignisse müssen durch die gesuchte LT verknüpft werden:

$$\big(x'^{\,0} = c\,t',\ x'^{\,1} = 0\big) \ \stackrel{\text{LT}}{\longleftrightarrow}\ \big(x^0 = c\,t,\ x^1 = v\,t\big) \tag{34.23}$$

Die Koordinaten $x'^{\,2} = x'^{\,3} = 0$ und $x^2 = x^3 = 0$ wurden nicht mit angeschrieben.

Wir werten zunächst die Bedingung (34.19) aus. Dazu schreiben wir $\Lambda^{\rm T}\eta\,\Lambda = \eta$ für (34.22) im relevanten Unterraum an:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_0^{\ 1} \\ \Lambda_1^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 0} \\ \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{34.24}$$

Ausmultipliziert sind dies vier Bedingungen, von denen aber zwei gleich sind. Damit erhalten wir drei Bedingungen:

$$\big(\Lambda_0^{\ 0}\big)^2 - \big(\Lambda_0^{\ 1}\big)^2 = 1\,, \quad -\big(\Lambda_1^{\ 1}\big)^2 + \big(\Lambda_1^{\ 0}\big)^2 = -1\,, \quad \Lambda_0^{\ 0}\Lambda_1^{\ 0} - \Lambda_0^{\ 1}\Lambda_1^{\ 1} = 0 \tag{34.25}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\Lambda_0^{\ 1} = -\sinh\psi$ und $\Lambda_1^{\ 0} = -\sinh\varphi$ setzen. Aus der ersten Bedingung folgt dann $\Lambda_0^{\ 0} = \pm\cosh\psi$, aus der zweiten $\Lambda_1^{\ 1} = \pm\cosh\varphi$. Die Transformation soll den Grenzfall der identischen Transformation enthalten; daher lassen wir jeweils nur das Pluszeichen zu. Aus der dritten Bedingung in (34.25) folgt $\varphi = \psi$. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^{\ 0} & \Lambda_1^{\ 0} \\ \Lambda_0^{\ 1} & \Lambda_1^{\ 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \tag{34.26}$$

Man vergleiche dies mit der bekannten Form einer speziellen orthogonalen Transformation (21.11); die Vorzeichen in der quadratischen Form von $ds^2$ führen zu

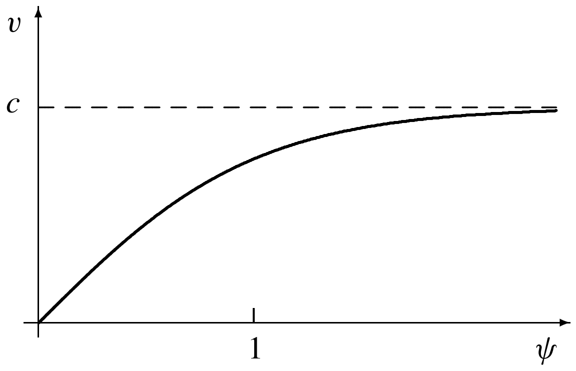



**Abbildung 34.2** Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $v$ und der Rapidität $\psi$.

den Hyperbelfunktionen anstelle von trigonometrischen Funktionen. Die Bedingung (34.23) ergibt

$$x'^1 = 0 = \Lambda^1_0\, c\, t + \Lambda^1_1\, x^1 = \big(\Lambda^1_0\, c + \Lambda^1_1\, v\big)\, t \qquad (34.27)$$

Hieraus folgt $\Lambda^1_0/\Lambda^0_0 = -\tanh\psi = -v/c$ oder

$$\boxed{\psi = \operatorname{artanh} \frac{v}{c} \qquad \text{Rapidität}} \qquad (34.28)$$

Die Größe $\psi$ heißt *Rapidität*. Der Zusammenhang zwischen der Rapidität $\psi$ und der Geschwindigkeit $v$ ist in Abbildung 34.2 dargestellt. Manche Beziehungen der SRT haben eine besonders einfache Form, wenn man die Rapidität anstelle der Geschwindigkeit verwendet.

Für beliebiges $\psi$ gilt

$$v < c \quad \text{für die Relativgeschwindigkeit } v \text{ zwischen IS und IS}' \qquad (34.29)$$

Diese Einschränkung folgt aus Einsteins Relativitätsprinzip. Es gibt damit kein IS′, das sich relativ zu einem anderen mit Lichtgeschwindigkeit (oder schneller) bewegt. Die praktische Unmöglichkeit eines solchen Bezugssystems (etwa eines Raketenlabors) folgt aus den Bewegungsgleichungen (Kapitel 38). Durch die Beschränkung $v < c$ erfährt der Begriff des IS eine Modifikation. Wir haben IS als Bezugssysteme eingeführt, die sich gegenüber dem Fixsternhimmel mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Im Relativitätsprinzip von Galilei sind unter „alle IS" daher auch solche mit $v > c$ zugelassen; dies ist allerdings ohne praktische Bedeutung. Im Relativitätsprinzip von Einstein bleibt es bei der Formulierung „alle IS", aber es gibt eben keine, die sich mit $v \geq c$ gegenüber dem Fixsternhimmel bewegen.

Die gesuchte spezielle LT ist nun

$$\boxed{\begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{Lorentz-transformation}} \qquad (34.30)$$

mit $\psi = \text{artanh}\,(v/c)$. Wir führen noch die Größe $\gamma$ (die nichts mit dem gelegentlich verwendeten Index $\gamma$ zu tun hat) ein,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \cosh\psi \tag{34.31}$$

Dann ist $\sinh\psi = \gamma\, v/c$ . Die spezielle LT kann damit in der Form

$$\begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\, v/c \\ -\gamma\, v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t \\ x \end{pmatrix} \tag{34.32}$$

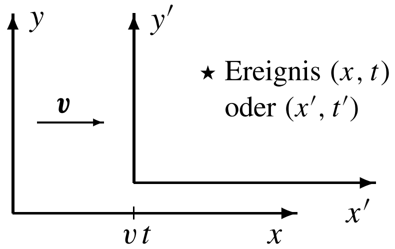
geschrieben werden, oder ausführlicher

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad c\,t' = \frac{c\,t - x\,v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{34.33}$$

Für $v \ll c$ reduziert sich dies auf die spezielle Galileitransformation (34.2). Die allgemeine LT wird in Kapitel 36 angegeben.

## Aufgaben

*34.1 Inverse Lorentztransformation*




Die spezielle Lorentztransformation $x' = x'(x,t)$ und $t' = t'(x,t)$ zwischen zwei Inertialsystemen wird als bekannt vorausgesetzt. Wie lautet die zugehörige Rücktransformation? Drücken Sie das Ergebnis alternativ durch die Geschwindigkeit $v$ oder die Rapidität $\psi$ aus.

*34.2 Matrixschreibweise für Wegelement*

Schreiben Sie die Lorentztransformation

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}\, dx^{\beta}$$

in Matrixschreibweise an. Werten Sie in dieser Schreibweise die Bedingung $ds^2 = ds'^2$ für das Minkowski-Wegelement aus.