

Korrekturen¹ zur *Mechanik*, 5. Auflage, 2006/7

Seite 8: In Aufgabe 1.1 $\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t)$ anstelle von $\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r$.

Seite 26: In der Zeile vor (4.9) ist $\dot{\mathbf{r}}_v$ durch $\mathbf{r}_v$ zu ersetzen.

Seite 28: In der Zeile vor (4.16) ist $\mathbf{r}_v$ durch $\dot{\mathbf{r}}_v$ zu ersetzen.

Seite 35 ff.: Die Diskussion der Kovarianz oder Invarianz des 2. Newtonschen Axioms unter Galileitransformationen wurde neu formuliert; einfache Beispiele fördern dabei die Verständlichkeit. – Meist wird die Frage der Galilei-Invarianzen erst im Rahmen des Lagrangeformalismus diskutiert (Kapitel 11), der sich hierfür besser eignet. Andererseits sollte ein einführendes Lehrbuch auch die Frage beantworten, was mit dem 2. Axiom bei einer Galileitransformation passiert. – Die modifizierten Seiten sind auf den Seiten 3 ff. dieses Dokuments wiedergegeben.

Seite 68: In der 3. Zeile nach (9.18) muss es $m_{ik} = m_{ki}$ heißen.

Seite 77: In Aufgabe 9.2 muss es $T = T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$ heißen.

Seite 140: In Aufgabe 16.1 muss es $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)/M$ heißen.

Seite 160: Im Anschluss an (18.31) muss es heißen:
„Dazu haben wir $v'_1(-\infty) = \dot{r}(-\infty)$ aus ...“

Seite 162: Gleichung (18.42) muss lauten:

$$x^2 - \frac{2m_1}{M} x \cos \theta' + \frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2} = 0$$

Seite 178: In Aufgabe 20.4 muss es $\Delta\Theta/\Theta = (\Theta_3 - \Theta_1)/\Theta_3$ heißen.

Seite 179: In Aufgabe 20.5 muss es $M = (4\pi/3) \varrho_0 a^2 c$ und $R = (a^2/c)^{1/3}$ heißen.

Seite 233: In Aufgabe 26.5, dritte Zeile, muss es $y_v^0 = a \cdot v$ heißen.

Seite 241: Aufgabe 27.2 beginnt mit „Für ein geladenes Teilchen ...“

Seite 263: Aufgabe 30.2 wurde neu formuliert:

30.2 Lösungsmethode nach d'Alembert

Zeigen Sie, dass die Wellengleichung $u''(x, t) - \ddot{u}(x, t)/c^2 = 0$ durch

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1)$$

¹Für wertvolle Hinweise bedanke ich mich bei Christoph Kandetzki und Marwan Sabih.

gelöst wird. Dabei sind f und g zunächst beliebige Funktionen einer Variablen. Wie hängen f und g mit den Anfangsbedingungen zusammen?

Wenden Sie diese *Lösungsmethode nach d'Alembert* auf die Saitenschwingung aus Aufgabe 30.1 an. Welchen Relationen müssen die Funktionen f und g genügen, damit die Randbedingungen für alle Zeiten erfüllt sind? Zeigen Sie dazu: Außerhalb des Definitionsbereichs $[0, l]$ müssen die Randbedingungen antisymmetrisch und periodisch (mit der Periode $2l$) fortgesetzt werden.

Berechnen Sie $u(x, t)$ für $0 \leq t \leq T/4$ mit $T = 2l/c$. Das Ergebnis für die volle Zeitperiode folgt dann aus Symmetrieüberlegungen.

Seite 345: Die erste Formel in Aufgabe 39.1 lautet

$$\begin{array}{ll} \text{LS:} & v_1 = V, \quad v_2 = 0 \\ \text{SS:} & v_1 = v, \quad v_2 = -v \end{array}$$

Seite 352: In Aufgabe 40.1 wird auf (40.25) anstelle von (9.23) verwiesen.

Durch eine weitere Differenziation erhält man

$$\ddot{x}'_j(t') = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \ddot{x}_i(t) \quad (5.13)$$

Hieran kann man noch einmal nachprüfen, dass das 1. Axiom kovariant unter der allgemeinen Galileitransformation ist:

$$m \ddot{x}_i(t) = 0 \quad \xleftrightarrow{(5.13)} \quad m \ddot{x}'_j(t') = 0 \quad (5.14)$$

2. Axiom

Wir betrachten das Verhalten des 2. Axioms unter einer Galileitransformation. Mit der Schreibweise $\mathbf{F} = \sum_i F_i \mathbf{e}_i$ setzen wir (wie bereits bisher) voraus, dass die Kraft ein Vektor ist. Das bedeutet, dass sich die Komponenten F_i bei einer Drehung so wie die x_i transformieren, also $F'_j = \sum_i \alpha_{ji} F_i$. Wir multiplizieren daher beide Seiten des 2. Axioms $m \ddot{x}_i = F_i$ mit α_{ji} und summieren über i . Damit erhalten wir

$$m \ddot{x}_i(t) = F_i(x, \dot{x}, t) \quad \text{transformiert zu} \quad m \ddot{x}'_j(t') = F'_j(x', \dot{x}', t') \quad (5.15)$$

Gleichzeitig führen wir die Galileitransformation in den Argumenten der Kraft durch; wir beschränken uns dabei auf die in (2.11) angegebenen (häufig vorkommenden) Argumente der Kraft. Konkret sind die ungestrichenen Argumente in $F_i(x, \dot{x}, t)$ gemäß (5.9) durch die gestrichenen zu ersetzen. Dabei stehen x für (x_1, x_2, x_3) und $\dot{x}$ für $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$.

Der Strich bei F'_j bedeutet nun zweierlei: Zum einen beziehen sich die Komponenten dieser Kraft nun auf die gedrehten Koordinatenachsen. Zum anderen sind $F_i(\dots)$ und $F'_i(\dots)$ im Allgemeinen *verschiedene* Funktionen ihrer Argumente (wegen der Transformation eben dieser Argumente). Als einfaches Beispiel unterwerfen wir die Funktion $f(x) = x$ der speziellen Galileitransformation (5.10). Dann ist $f(x) = x = x' + v t = x' + v t' = g(x', t')$. Offensichtlich ist $f(x)$ eine andere Funktion der Argumente als $g(x', t')$, auch wenn $f = g$ gilt. Dieser Unterschied ist in (5.15) durch den (unscheinbaren) Strich nur angedeutet; denn – wie in der Physik üblich – führen wir keinen neuen Buchstaben ein. Die Kraft wird vielmehr immer durch den Buchstaben F (force) gekennzeichnet.

Nach der Galileitransformation haben die Newtonschen Axiome dieselbe Form (linker und rechter Teil von (5.15)); sie sind forminvariant oder *kovariant*. Unter bestimmten Umständen hängen die Kräfte F_i und F'_i aber darüberhinaus in derselben Weise von ihren Argumenten ab. Dann sind die Newtonschen Gesetze *invariant* unter Galileitransformationen. Wir erläutern diese Unterscheidung anhand von Beispielen.

Als erstes setzen wir eine Galileitransformation in die übliche Reibungskraft ein:

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}}) = -\gamma \dot{\mathbf{r}} = -\gamma (\dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{v}) = \mathbf{F}'(\dot{\mathbf{r}}') \quad (5.16)$$

Die neue Kraft ist eine andere Funktion des Arguments als die alte; denn $\mathbf{F}'(\dot{\mathbf{r}}') \neq -\gamma \dot{\mathbf{r}}'$. Da $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}'$ unterschiedliche Funktionen sind, ist das Bewegungsgesetz nicht invariant unter Galileitransformationen. In diesem Fall sind die beiden Inertialsysteme nicht gleichwertig. Es gibt vielmehr ein bevorzugtes Inertialsystem, nämlich dasjenige, in dem das die Reibung verursachende Medium ruht (in diesem IS gilt dann $\mathbf{F} = -\gamma \dot{\mathbf{r}}$).

Andere Beispiele für nichtinvariante Kräfte sind orts- und zeitabhängige äußere Kräfte, denn sie ändern sich im Allgemeinen bei Orts- oder Zeitverschiebungen. Eine äußere Kraft kann auch eine Vorzugsrichtung haben (zum Beispiel das Schwerkraftfeld an der Erdoberfläche), dann ist die Invarianz unter Drehungen verletzt.

Nun zu einem Beispiel mit einer invarianten Kraft. Ein Planet (Masse m_1) hat unter dem Einfluss der Sonne (Masse m_2) die Bewegungsgleichung

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (5.17)$$

Hieraus wird unter einer Galileitransformation (dabei ist (5.9) sowohl für $\mathbf{r}_1$ wie für $\mathbf{r}_2$ auszuführen):

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1 = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|^3} \quad (5.18)$$

Die räumlichen und zeitlichen Verschiebungen heben sich in den Differenzen auf der rechten Seite jeweils auf.

Man beachte, dass in jedem Fall $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ gilt. Dies folgt einfach daraus, dass wir eine Galileitransformation in die Gleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ einsetzen, und dass für diese Transformation $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}'$ gilt. Da die Kräfte jeweils von denselben Argumenttypen abhängen, nämlich $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ und $\mathbf{F}'(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}', t')$, sind die Bewegungsgleichungen immer kovariant (von derselben Form). Sie sind aber nur dann invariant, wenn $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}'$ darüberhinaus in derselben Weise von ihren Argumenten abhängen.

Passive und aktive Transformation

Die Galileitransformation kann (i) zwei Inertialsysteme oder (ii) zwei physikalische Systeme miteinander verbinden:

- (i) *Passive Transformation*: Wir betrachten *ein* physikalisches System von *zwei* verschiedenen Bezugssystemen IS und IS' aus. Die Vorgänge im System werden von den Experimentatoren in IS und IS' durch Gesetze der gleichen Form beschrieben (*Kovarianz*, synonym zu *Forminvarianz*). So wenden beide Experimentatoren Newtons Axiome an; dabei verknüpft die Galileitransformation die Koordinaten, die ein bestimmtes Ereignis in IS und IS' hat.
- (ii) *Aktive Transformation*: Innerhalb *eines* Bezugssystems IS betrachten wir *zwei* physikalische Systeme, die durch eine Galileitransformation auseinander hervorgehen. Auch hier werden die Vorgänge in beiden Systemen durch Gesetze der gleichen Form beschrieben (*Kovarianz*). Die Vorgänge laufen in den

beiden Systemen aber im Allgemeinen verschieden ab, da sich die äußeren Kräfte bei der Transformation ändern.

Speziell für *abgeschlossene* Systeme sind die Bewegungsgesetze nicht nur kovariant, sondern darüberhinaus *invariant* unter Galileitransformationen (nächster Abschnitt). In diesem Fall laufen die Vorgänge in beiden Systemen in gleicher Weise ab.

Das Einsetzen einer Galileitransformation in die Newtonschen Axiome ist zunächst ein formaler Schritt, der durch die Transformationsgleichungen (5.9) festgelegt ist. Dieser Schritt kann zwei ganz unterschiedliche Bedeutungen haben: Zum einen können zwei Beobachter (jeweils in IS oder IS' ruhend) dasselbe physikalische System betrachten. Dann ist klar, dass sie denselben physikalischen Vorgang beschreiben, sie verwenden dazu lediglich unterschiedliche Koordinaten (die jeweiligen Standardkoordinaten von IS und IS'). Zum anderen kann ein IS-Beobachter zwei verschiedene physikalische Systeme betrachten, nämlich ein zunächst gegebenes, und dann dasjenige, das sich hieraus durch die (aktive) Galileitransformation (etwa durch Drehung oder Verschiebung) ergibt. Im Allgemeinen werden die physikalischen Vorgänge in den beiden Systemen unterschiedlich verlaufen. Verlaufen sie jedoch gleich, dann liegt eine Symmetrie (Invarianz unter der Galileitransformation) vor.

Wir haben die Galileitransformationen unter dem ersten (passiven) Gesichtspunkt eingeführt. Im Folgenden wird der zweite (aktive) Gesichtspunkt näher erläutert. Wir kennzeichnen eine aktive Transformation durch einen Stern als Index:

$$x_i \rightarrow x_i^* = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k - v_i t - a_i, \quad t \rightarrow t^* = t - t_0 \quad (5.19)$$

Hier sind x_i , t und x_i^* , t^* Koordinaten *im gleichen* IS; sie bezeichnen etwa die Position eines Massenpunkts und eines zweiten dazu verschobenen. Setzen wir nun die Transformation (5.10) in Newtons Axiome ein, so erhalten wir wie in (5.15) die Bewegungsgesetze für die beiden Massenpunkte:

$$m \ddot{x}_i(t) = F_i(x, \dot{x}, t) \quad \text{transformiert zu} \quad m \ddot{x}_i^*(t^*) = F_i^*(x^*, \dot{x}^*, t^*) \quad (5.20)$$

Die Bewegung verläuft in beiden Fällen nur dann in derselben Weise, wenn die Kräfte $F_i(x, \dot{x}, t)$ und $F_i^*(x^*, \dot{x}^*, t^*)$ in derselben Weise von ihren Argumenten abhängen. Wie die Diskussion im letzten Abschnitt zeigt, ist dies eine nichttriviale Bedingung. Sie ist zum Beispiel für Reibungskräfte nicht erfüllt, und im Allgemeinen auch nicht für äußere Kräfte. Die Bedingung gilt dagegen für die Gravitationskräfte in (5.17) und (5.18).

Invarianz der Newtonschen Axiome

Ein System ohne Wechselwirkung mit der Umgebung bezeichnen wir als *abgeschlossen*. Für ein abgeschlossenes System aus Massenpunkten (Kapitel 4) verschwinden die äußeren Kräfte. Die inneren Kräfte sollen konservativ sein und sich

gemäß (4.30) durch Potenziale darstellen lassen. Dann sind die Kräfte von der Form

$$\mathbf{F}_v = - \sum_{\mu, \mu \neq v}^N \frac{\partial U_{v\mu}(|\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu|)}{\partial \mathbf{r}_v} \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (5.21)$$

Der Abstand $|\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu|$ ist invariant unter den Verschiebungen und Drehungen einer Galileitransformation. Wegen

$$U(|\mathbf{r}_v^* - \mathbf{r}_\mu^*|) = U(|\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu|) \quad (5.22)$$

hängen dann $\mathbf{F}_v^*$ und $\mathbf{F}_v$ in derselben Weise von ihren Argumenten ab. Die Bewegungsgleichungen sind daher invariant, und die tatsächliche Bewegung verläuft in beiden Systemen in gleicher Weise.

Für abgeschlossene Systeme bedeutet die *Invarianz* der Bewegungsgleichungen unter Galileitransformationen, dass die Bewegung im verschobenen oder gedrehten System in gleicher Weise abläuft. So würde zum Beispiel unser Sonnensystem auch in einer Entfernung von 10^8 Lichtjahren in gleicher Weise funktionieren; dabei vernachlässigen wir äußere Kräfte wie das Gravitationsfeld unserer Galaxie (Milchstraße). Die Invarianz der Bewegungsgesetze bedeutet auch, dass unser Sonnensystem morgen oder in 10^8 Jahren genauso funktioniert, oder im gedrehten Zustand, oder mit einer beliebigen Geschwindigkeit relativ zum jetzigen Zustand. Die tatsächliche Bewegung hängt dabei von den jeweiligen Anfangsbedingungen ab. Die zeitliche Translationsinvarianz bedeutet nicht, dass die tatsächliche Bewegung unseres Sonnensystems in 10^8 Jahren überhaupt noch irgendeine Ähnlichkeit mit der jetzigen Situation hat. Es wird lediglich behauptet, dass alle Vorgänge in 10^8 Jahren bei gleichen Anfangsbedingungen so wie jetzt ablaufen würden.

Als Gegenbeispiel betrachten wir eine waagerechte Billardplatte und eine etwas gekippte Billardplatte. Diese beiden Systeme sind durch eine aktive Galileitransformation (Drehung) miteinander verbunden. Da es eine äußere Kraft (Schwerkraft) gibt, handelt es sich nicht um ein abgeschlossenes System. Für beide Systeme können aber Newtons Axiome verwendet werden (wegen der Kovarianz). Die tatsächliche Bewegung (das Billardspiel) läuft aber sehr unterschiedlich ab, weil das äußere Kraftfeld (Schwerefeld) nicht drehinvariant ist; die Kräfte in den beiden Systemen sind verschieden. Ein dreidimensionales Billard im Inneren eines Quaders im Weltraum ist dagegen *invariant* unter der Drehung; die tatsächliche Bewegung verläuft im gedrehten System genauso wie im nichtgedrehten.

Die hier diskutierte Unabhängigkeit vom Ort, der Orientierung, der Zeit und der Relativgeschwindigkeit sind Konsequenzen der Invarianz der Newtonschen Axiome (für abgeschlossene Systeme) unter allgemeinen Galileitransformationen. Es sei daran erinnert, dass diese Axiome nicht abgeleitet sondern lediglich postuliert wurden. Tatsächliche Beobachtungen stehen (von hohen Geschwindigkeiten abgesehen) in Übereinstimmung mit den Axiomen und der dadurch beschriebenen Unabhängigkeit von Ort, Orientierung, Zeit und Relativgeschwindigkeit.

Für die Untersuchung der Galileiinvarianz und ihre Konsequenzen (Erhaltungsgrößen) ist der noch einzuführende Lagrangeformalismus viel besser geeignet als

die Newtonschen Bewegungsgleichungen. Die hier begonnene Diskussion der Galileiinvarianz und ihrer Konsequenzen (Erhaltungsgrößen) wird daher erst in Kapitel 11 fortgesetzt.

Gültigkeit der Galileitransformation

Eine Front einer elektromagnetischen Welle bewege sich in IS mit der Lichtgeschwindigkeit $\dot{x} = c$ in x -Richtung. Wir betrachten nun dieselbe Welle von IS' aus. Nach der Galileitransformation hat die Wellenfront in IS' eine andere Geschwindigkeit:

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \xrightarrow[\text{Galileitransformation}]{x' = x - vt', \quad t' = t} \quad \frac{dx'}{dt'} = c - v \quad (5.23)$$

Im Gegensatz hierzu ergeben die Maxwellgleichungen immer die Geschwindigkeit c für eine Wellenfront; denn dieses c ist ein Parameter der Maxwellgleichungen. Die Maxwellgleichungen sind daher nicht kovariant unter der Galileitransformation.

Aus diesen Feststellungen ergeben sich die folgenden beiden Möglichkeiten:

1. Die Maxwellgleichungen gelten nicht in allen IS. Sie sind nichtrelativistisch und damit keine grundlegenden Gleichungen im Sinn des Relativitätsprinzips von Galilei.

Dies ist ein durchaus plausibler Standpunkt: So gibt es etwa für andere Wellen (wie Wasser- oder Schallwellen) ein bevorzugtes IS, nämlich das IS, in dem das wellentragende Medium (etwa Wasser oder Luft) ruht. Unter Schallgeschwindigkeit versteht man gerade die Ausbreitungsgeschwindigkeit in diesem bevorzugten IS. Maxwell selbst nahm die Existenz eines Mediums an, in dem sich Licht ausbreitet; dieses postulierte Medium wird Äther genannt. Die Maxwellgleichungen sollten dann nur in dem IS gelten, das relativ zum Äther ruht.

2. Die Maxwellgleichungen gelten in allen IS. Dann kann die Galileitransformation aber nicht die richtige Transformation zwischen verschiedenen IS sein.

Gäbe es den Äther als lichttragendes Medium, so müssten sich je nach IS unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten messen lassen. Überraschenderweise misst man aber in verschiedenen IS die gleiche Lichtgeschwindigkeit c . Daher musste das Konzept des Äthers aufgegeben werden. Einstein formulierte das Relativitätsprinzip „Alle IS sind gleichwertig“ neu: Die grundlegenden Gesetze *inklusive* der Maxwellgleichungen sind von gleicher Form in allen IS. Danach können die Galileitransformationen nicht mehr die (exakt) richtigen Transformationen zwischen Inertialsystemen sein. Sie werden vielmehr durch die Lorentztransformationen (Teil IX) ersetzt. Dies impliziert dann auch, dass Newtons Axiome nicht exakt richtig sind. Die Galileitransformationen und Newtons Axiome bleiben jedoch im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten ($v \ll c$) gültig.