

25 Streuung von Licht

Im Feld einer elektromagnetischen Welle schwingt ein geladenes Teilchen hin und her. Das so oszillierende Teilchen sendet dann elektromagnetische Strahlung aus. Durch diesen Prozess wird die elektromagnetische Welle gestreut. Wir berechnen den Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Licht an Atomen (Abbildung 25.1). Wir behandeln die Thomsonstreuung, die Rayleighstreuung, die Resonanzfluoreszenz und den Übergang zwischen kohärenter und inkohärenter Streuung.

Ein Elektron (Ladung $q = -e$, Masse m_e) bewege sich in einem harmonischen Oszillatorpotenzial (Frequenz ω_0 , Dämpfung Γ). Zusätzlich sollen die Felder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (25.1)$$

und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{k}/k) \times \mathbf{E}$ einer elektromagnetischen Welle (20.21) auf das Elektron wirken. Dann lautet die Bewegungsgleichung für die Bahn $\mathbf{r}_0(t)$ des Elektrons:

$$m_e \ddot{\mathbf{r}}_0 + m_e \Gamma \dot{\mathbf{r}}_0 + m_e \omega_0^2 \mathbf{r}_0 = -e \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t)] + \mathcal{O}(v/c) \quad (25.2)$$

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ sei nichtrelativistisch, $v \ll c$. Dann ist die Kraft des Magnetfelds von der relativen Größe $v/c \ll 1$; sie wird vernachlässigt. Von Gleichung (25.2) ist der Realteil zu nehmen; die Realteilbildung wird hier nicht explizit angeschrieben.

Das Oszillatormodell (25.2) kann auf ein im Atom gebundenes Elektron angewendet werden; dabei ist ω_0 gleich $\omega_{\text{at}} = m_e e^4 / \hbar^3$, (24.36), zu setzen. Dies ergibt ein Modell für die Streuung von Licht an Atomen, Abbildung 25.1. In der folgenden Diskussion betrachten wir vor allem diesen Fall.

Die Reibungskraft $-m_e \Gamma \dot{\mathbf{r}}_0$ in (25.2) beschreibt alle Prozesse, durch die das Elektron Energie verliert. Solche Prozesse sind Stöße des Atoms mit anderen Atomen oder die vom Elektron abgegebene Strahlung. Für den zweiten Fall können wir Γ aus der Strahlungskraft (24.47) bestimmen: Verglichen mit den anderen Kräften ist die Strahlungskraft im Atom von der relativen Größe $\alpha^3 \sim 10^{-6}$. In einem so kleinen Term kann die ungestörte Lösung $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{a} \exp(-i\omega_0 t)$ verwendet werden, also

$$\mathbf{F}_{\text{str}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \approx -\frac{2e^2}{3c^3} \omega_0^2 \mathbf{v} = -m_e \Gamma_{\text{str}} \mathbf{v} \quad (25.3)$$

Im letzten Schritt haben wir \mathbf{F}_{str} gleich der Dämpfungskraft in (25.2) mit $\Gamma = \Gamma_{\text{str}}$ gesetzt. Daraus erhalten wir

$$\Gamma_{\text{str}} = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3m_e c^3}, \quad \Gamma_{\text{str}} \stackrel{\omega_0 \equiv \omega_{\text{at}}}{=} \frac{2}{3} \alpha^3 \omega_{\text{at}} \sim 10^{-6} \omega_{\text{at}} \quad (25.4)$$

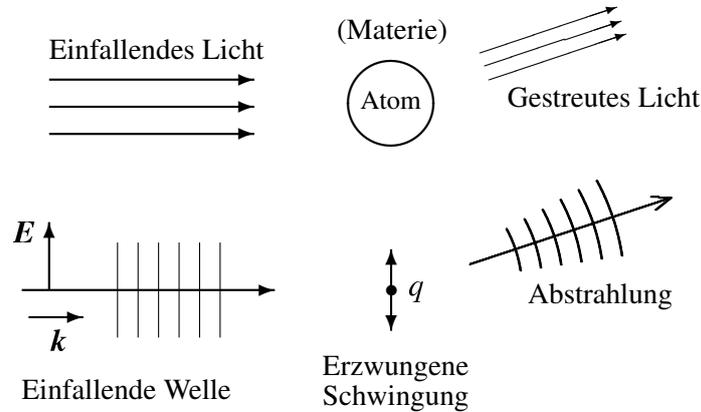


Abbildung 25.1 Licht kann von Materie gestreut werden (oben). Wir untersuchen Streuvorgänge, die durch einzelne Atome hervorgerufen werden. In der theoretischen Behandlung (unten) wird das einfallende Licht durch eine ebene, elektromagnetische Welle beschrieben. Ein harmonisch gebundenes Teilchen simuliert das im Atom gebundene Elektron. Die elektromagnetischen Kräfte der Welle regen das geladene Teilchen zu Schwingungen an. Diese erzwungenen Schwingungen stellen einen oszillierenden Dipol dar, der nach der Dipolformel in verschiedene Richtungen abstrahlt.

Im Folgenden lassen wir die Werte von Γ und ω_0 zunächst als Modellparameter offen.

Für die Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$ des einfallenden Lichts soll gelten

$$\lambda \gg r_0(t) \quad \text{oder} \quad \lambda \gg a_B \quad (25.5)$$

Für das Elektron im Atom muss die Wellenlänge groß gegenüber dem Bohrschen Radius a_B sein, für das freie Elektron ($\omega_0 = 0$) darf die durch die Welle erzeugte Auslenkung r_0 nicht zu groß sein. Mit

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) = 1 + \mathcal{O}(r_0/\lambda) \approx 1 \quad (25.6)$$

wird (25.2) zu

$$m_e \ddot{\mathbf{r}}_0 + m_e \Gamma \dot{\mathbf{r}}_0 + m_e \omega_0^2 \mathbf{r}_0 = -e \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad (25.7)$$

Diese lineare, inhomogene Differenzialgleichung beschreibt den wohlbekannten Fall eines gedämpften harmonischen Oszillators mit periodischer Anregung. Die allgemeine Lösung setzt sich aus der homogenen und einer partikulären Lösung zusammen:

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_{0,\text{hom}}(t) + \mathbf{r}_{0,\text{part}}(t) \quad (25.8)$$

Die allgemeine homogene Lösung klingt durch die Dämpfung ab, $\mathbf{r}_{0,\text{hom}} \approx 0$ für $t \gg 1/\Gamma$. Wir betrachten daher nur die partikuläre Lösung, also die erzwungene Schwingung. Der Ansatz

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_{0,\text{part}}(t) = \mathbf{a} \exp(-i\omega t) \quad (25.9)$$

führt in (25.7) zu

$$\left(-\omega^2 - i\Gamma\omega + \omega_0^2\right) \mathbf{a} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 \quad (25.10)$$

Hieraus erhalten wir das zeitabhängige Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ des Elektrons:

$$\mathbf{p}(t) = -e \mathbf{r}_0(t) = -e \mathbf{a} \exp(-i\omega t) = \frac{e^2 \mathbf{E}_0 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \exp(-i\omega t) \quad (25.11)$$

Das Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ ist proportional zum Feld $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$; es wird durch das Feld *induziert*. (Im engeren Sinn spricht man von „induzierten“ Strömen und dem Faradayschen Induktionsgesetz. Wir verwenden „induziert“ auch allgemeiner für „durch äußere Felder hervorgerufen“.) Der Proportionalitätsfaktor

$$\alpha_e(\omega) = \frac{e^2 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \quad (25.12)$$

in $\mathbf{p} = \alpha_e \mathbf{E}$ heißt elektrische *Polarisierbarkeit*. Diese Größe spielt eine wichtige Rolle für die Elektrodynamik in Materie (Teil VI).

Wir nehmen an, dass alle Komponenten von \mathbf{E}_0 dieselbe Phase haben, so dass (24.25) erfüllt ist. Wir setzen (25.11) in (24.26) ein:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4 |\mathbf{p}|^2 \sin^2\theta}{8\pi c^3} = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (25.13)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen \mathbf{E}_0 und der Richtung der Abstrahlung:

$$\theta = \sphericalangle(\mathbf{p}, \mathbf{e}_r) = \sphericalangle(\mathbf{E}_0, \mathbf{e}_r) \quad (25.14)$$

Das einfallende Licht induziert ein zeitabhängiges Dipolmoment; dieses induzierte Dipolmoment strahlt Wellen der gleichen Frequenz ab. Dieser Vorgang bedeutet eine *elastische Streuung* des Lichts. Unter „elastisch“ versteht man „ohne Energieverlust“, im betrachteten Fall also „ohne Frequenzänderung“. (Im Gegensatz dazu ist der Comptoneffekt die inelastische Streuung von Licht an freien Elektronen.)

Wir definieren den differentiellen *Wirkungsquerschnitt* durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{gestreute Teilchen/Zeit/d}\Omega}{\text{einfall. Teilchen/Zeit/Fläche}} = \frac{\text{abgestrahlte Leistung pro } d\Omega}{\text{einfallende Leistung pro Fläche}} = \frac{dP/d\Omega}{\langle |\mathbf{S}| \rangle} \quad (25.15)$$

Wir haben zuerst die übliche Definition mit „Teilchen pro Zeit“ angegeben. Wenn man hierin Zähler und Nenner mit der Energie $\hbar\omega$ eines Photons multipliziert, erhält man stattdessen „Energie pro Zeit“ oder „Leistung“. Nach (20.45, 20.44) gilt für die einfallende Energiestromdichte (Leistung pro Fläche):

$$\langle |\mathbf{S}| \rangle = c \langle w_{\text{em}} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \quad (25.16)$$

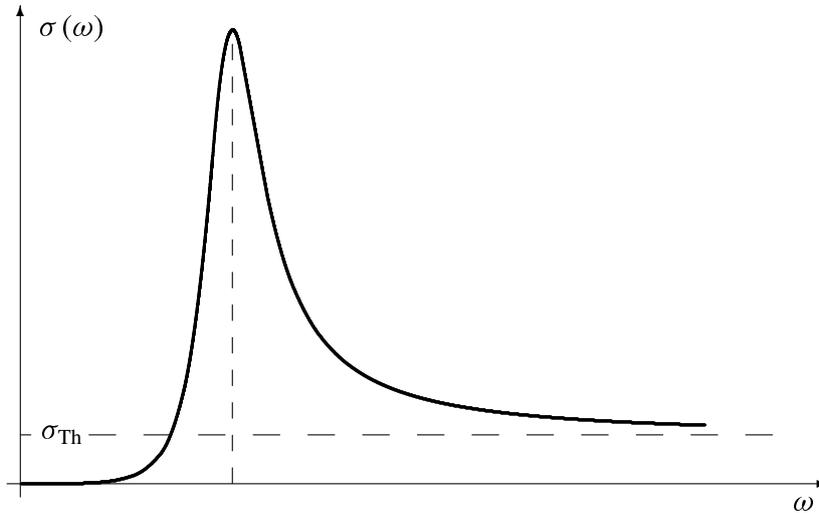


Abbildung 25.2 Der Wirkungsquerschnitt $\sigma(\omega)$ für die Streuung von Licht an Atomen wurde im Oszillatormodell (25.2) berechnet. Die Frequenzabhängigkeit ist für $\Gamma/\omega_0 = 1/3$ gezeigt. Tatsächlich ist das Verhältnis Γ/ω_0 meist viel kleiner; die Resonanzkurve ist dann entsprechend schmäler und höher. Falls Γ nur die Strahlungsdämpfung (25.4) enthält, gilt $\Gamma_{\text{str}}/\omega_{\text{at}} \sim \alpha^3 \sim 10^{-6}$. Die sehr scharfe Resonanzkurve hat dann ihre *natürliche Linienbreite*.

Damit erhalten wir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{\langle |S| \rangle} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \sin^2 \theta \quad (25.17)$$

Der Winkel θ ist durch (25.14) definiert. (Bei anderen Streuprozessen bezeichnet θ üblicherweise einen anderen Winkel, und zwar den Winkel zwischen der Richtung \mathbf{k} der einfallenden Welle und der Richtung \mathbf{e}_r der auslaufenden Welle.)

Aus (25.17) folgt der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Licht an einem Elektron:

$$\sigma = \sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (25.18)$$

Für ausgewählte Parameterwerte ist die Funktion $\sigma(\omega)$ in Abbildung 25.2 gezeigt. Der Wirkungsquerschnitt σ ist die Fläche, an der die einfallende Stromdichte (hier Energiestromdichte, sonst Teilchenstromdichte) effektiv gestreut wird. Diese Fläche ist durch den Faktor $(e^2/m_e c^2)^2$ bestimmt, der unten numerisch angegeben wird.

Polarisation des Streulichts

Wir diskutieren zunächst die Polarisation des Streulichts. Dazu betrachten wir noch einmal Abbildung 25.1. Das induzierte Dipolmoment \mathbf{p} ist parallel zum Feldvektor \mathbf{E} der einfallenden Welle. Nach (24.21) erfolgt keine Abstrahlung in Richtung

von \mathbf{p} , also in die Richtung „oben“ im Bild. Steht der Feldvektor \mathbf{E} aber senkrecht zur Bildebene, so gilt dies auch für \mathbf{p} , und die Abstrahlung in Richtung „oben“ verschwindet nicht. Dies bedeutet für den Einfall von nichtpolarisiertem Licht auf Materie: Bei einem Streuwinkel von 90° ist das gestreute Licht polarisiert. Der Feldvektor \mathbf{E}_{str} des Streulichts steht dabei senkrecht auf der von \mathbf{k} (einfallende Welle) und \mathbf{e}_r (Ausfallsrichtung) gebildeten Ebene. Bei anderen Streuwinkeln ergibt sich im Allgemeinen teilweise polarisiertes Licht.

Thomsonstreuung

Wir betrachten einige Grenzfälle des Wirkungsquerschnitts (25.18). Der Grenzfall sehr hoher Frequenzen wird als *Thomsonstreuung* bezeichnet:

$$\sigma_{\text{Th}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad \begin{array}{l} \text{Thomsonstreuung} \\ (\omega \gg \omega_0) \end{array} \quad (25.19)$$

Für hohe Frequenzen folgt das Elektron der alternierenden Feldstärke der Welle immer weniger, $r_0 \propto 1/\omega^2$. Da die abgestrahlte Dipolleistung P mit ω^4 anwächst, nähert sich der Wirkungsquerschnitt schließlich dem endlichen Wert σ_{Th} .

Die Quantenelektrodynamik (QED) ergibt im nichtrelativistischen Fall für freie Elektronen ($\omega_0 = 0$):

$$\sigma(\text{QED}) = \sigma_{\text{Th}} \left(1 + \mathcal{O}(v/c) \right) \quad (\text{freie Elektronen, } \hbar\omega \ll m_e c^2) \quad (25.20)$$

Für hinreichend hohe Frequenzen ist die Voraussetzung (25.5) unserer Rechnung nicht mehr erfüllt; auch (25.20) gilt dann nicht. Experimentell fällt der elastische Wirkungsquerschnitt bei Frequenzen im Bereich $\hbar\omega \sim m_e c^2$ ab und geht für $\omega \rightarrow \infty$ gegen null. Dieses Verhalten – wie auch alle anderen Experimente mit Elektronen und Photonen – werden von der vollen (relativistischen) QED korrekt beschrieben.

Setzt man σ_{Th} gleich dem geometrischen Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer Kugel mit dem Radius R_0 , so ergibt sich

$$\sigma_{\text{Th}} = \pi R_0^2 \quad \longrightarrow \quad R_0 \approx 4.6 \text{ fm} = \mathcal{O}(R_e) \quad (25.21)$$

Abgesehen von numerischen Faktoren ist R_0 gleich dem klassischen Elektronradius $R_e = 3e^2/(5m_e c^2) \approx 1.7 \text{ fm}$ aus (6.35).

Rayleighstreuung

Für kleine Frequenzen ergibt (25.18) den Grenzfall der *Rayleighstreuung*

$$\sigma = \sigma_{\text{Th}} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad \begin{array}{l} \text{Rayleighstreuung} \\ (\omega \ll \omega_0) \end{array} \quad (25.22)$$

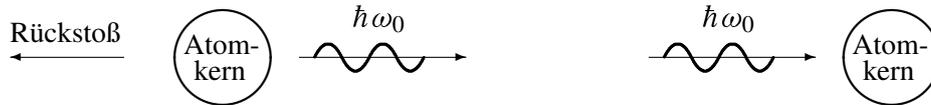


Abbildung 25.3 Ein Atomkern sendet ein γ -Quant mit einer bestimmten Frequenz aus (zum Beispiel $\hbar\omega_0 = 14.4 \text{ keV}$ für ^{57}Fe). Ein Atomkern der gleichen Sorte kann dieses γ -Quant wieder absorbieren. Diese Resonanzfluoreszenz wird normalerweise dadurch behindert, dass der Rückstoß auf den emittierenden Atomkern zu einer Frequenzverschiebung führt. Unter geeigneten Bedingungen kann der Rückstoß mit endlicher Wahrscheinlichkeit vom gesamten Kristallverband aufgenommen werden; die Frequenzverschiebung ist dann vernachlässigbar klein. Diese rückstoßfreie Resonanzfluoreszenz ist unter dem Namen Mößbauer-Effekt bekannt.

Wegen

$$\frac{\hbar\omega_{\text{sichtbar}}}{\hbar\omega_{\text{at}}} \approx 0.1 \quad (25.23)$$

können wir (25.22) auf die Streuung von sichtbarem Licht an Atomen anwenden. Die ω^4 -Abhängigkeit führt dazu, dass blaues Sonnenlicht in der Atmosphäre stärker als rotes gestreut wird:

$$\frac{\sigma_{\text{blau}}}{\sigma_{\text{rot}}} = \frac{\omega_{\text{blau}}^4}{\omega_{\text{rot}}^4} \approx 10 \quad (25.24)$$

Dabei haben wir $\omega_{\text{blau}}/\omega_{\text{rot}} = \lambda_{\text{rot}}/\lambda_{\text{blau}} \approx 1.8$ verwendet. Das Streulicht enthält also etwa zehnmal mehr blaues als rotes Licht. Daher erscheint der Himmel blau. Ein Sonnenuntergang kann dagegen rot erscheinen, weil der blaue Anteil durch die Streuung reduziert wurde.

Resonanzfluoreszenz

Bei $\omega = \omega_0$ hat der Wirkungsquerschnitt (25.18) ein Maximum der Stärke

$$\sigma_{\text{res}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2} \quad \begin{array}{l} \text{Resonanzstreuung} \\ (\omega = \omega_0) \end{array} \quad (25.25)$$

Dieser Grenzfall ergibt sich insbesondere dann, wenn Strahlung eines bestimmten Atomübergangs von einem Atom derselben Sorte wieder absorbiert wird. Diese *Resonanzfluoreszenz* kann es auch für Übergänge im Atomkern geben (Abbildung 25.3).

Ein Atom (oder Molekül oder Atomkern) hat im Allgemeinen viele Resonanzfrequenzen, die durch Messung des Wirkungsquerschnitts für elektromagnetische Wellen bestimmt werden können. Dabei entsprechen die möglichen Resonanzfrequenzen $\hbar\omega_j$ den Energiedifferenzen von Zuständen des betrachteten Systems. Die Breite der Resonanz entspricht der Unschärfe $\Delta E \sim \hbar/\tau$ dieser Energiezustände aufgrund ihrer endlichen Lebensdauer τ .

Wir setzen $\omega_0/\Gamma = \omega_{\text{at}}/\Gamma_{\text{str}} = 3/(2\alpha^3)$, (25.4), und $(e^2/a_B)/m_e c^2 = \alpha^2$ in (25.25) ein:

$$\sigma_{\text{res}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2/a_B}{m_e c^2} \right)^2 a_B^2 \left(\frac{3}{2\alpha^3} \right)^2 = \frac{6\pi}{\alpha^2} a_B^2 \quad (25.26)$$

Dies entspricht dem geometrischen Wirkungsquerschnitt $\sigma = \pi R_0^2$ an einer Kugel mit einem Radius $R_0 \approx 3 \cdot 10^2 a_B$, also an einer Fläche, die etwa 10^5 mal größer als der Querschnitt des Atoms ist. Dieser Fall eines sehr scharfen, sehr hohen Maximums ergibt sich aber nur dann, wenn die Breite Γ gleich Γ_{str} ist; also wenn neben der Abstrahlung keine anderen Effekte zu Γ beitragen. Diese Breite heißt auch *natürliche Linienbreite*.

Die Breite einer Resonanz wird durch alle Prozesse vergrößert, die die zugehörige Lebensdauer verkürzen. Hinzu kommt noch die Dopplerverbreiterung aufgrund des Rückstoßes, den ein Atom (oder Atomkern) bei der Emission (Absorption) erleidet (Abbildung 25.3). Speziell im Mößbauer-Effekt wird dieser Rückstoß durch den Kristall aufgenommen, in dem der betrachtete Atomkern eingebunden ist. Dadurch kommt es hier zur *rückstoßfreien Resonanzfluoreszenz*, dem Mößbauereffekt; dann hat die emittierte γ -Strahlung ihre natürliche Linienbreite. Die außerordentliche Schärfe einer solchen γ -Strahlung erlaubt es, Frequenzen mit extrem hoher Präzision zu messen.

Kohärente und inkohärente Streuung

Wir betrachten jetzt die Streuung von Licht an N gleichartigen Streuzentren, die an den Orten \mathbf{r}_j lokalisiert sind. Die einfallende Welle induziert die Dipolmomente $\mathbf{p}_j(t) \propto \mathbf{E}(\mathbf{r}_j, t)$. Damit enthalten die \mathbf{p}_j den Phasenfaktor $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)$, der die Wegdifferenzen der einfallenden Welle zu den Streuzentren widerspiegelt. Ein weiterer Faktor $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)$ ergibt sich aus den Wegdifferenzen von den Streuzentren zum Beobachtungspunkt. Wir addieren die Streuwellen der einzelnen, oszillierenden Dipole und erhalten so

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_N = \frac{d\sigma}{d\Omega} \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega} |F(\mathbf{q})|^2 \quad \text{mit } \mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}' \quad (25.27)$$

Der Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$, (25.18), für ein einzelnes Streuzentrum wird dem Betragsquadrat des *Formfaktors* $F(\mathbf{q})$ multipliziert. Der Formfaktor ist die Fouriertransformierte der Dichte $\sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ der Streuzentren. Aus dem experimentellen Wirkungsquerschnitts $(d\sigma/d\Omega)_N$ kann auf $F(\mathbf{q})$ und damit auf die räumliche Verteilung der Streuzentren zurückgeschlossen werden (Aufgabe 25.2). Im Folgenden betrachten wir eine statistische Verteilung der Streuzentren (etwa die Moleküle eines Gases). Wir werten $|F(\mathbf{q})|^2$ aus:

$$|F(\mathbf{q})|^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] = N + 2 \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \cos[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \quad (25.28)$$

Die Terme mit $i = j$ ergeben den Beitrag N ; für $i \neq j$ wurden der (i, j) - und der (j, i) -Term zusammengefasst.

Eine große Zahl $N \gg 1$ von Streuzentren sei über einen Bereich mit dem Radius R verteilt; es gelte $|\mathbf{r}_j| \leq R$. Aus (25.28) folgen dann die beiden Grenzfälle

$$|F(\mathbf{q})|^2 \approx \begin{cases} N^2 & (R \ll \lambda, \text{ kohärente Streuung}) \\ N & (R \gg \lambda, \text{ inkohärente Streuung}) \end{cases} \quad (25.29)$$

Für $R \ll \lambda$ gilt $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \ll 1$ und $\cos[\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \approx 1$. Für $R \gg \lambda$ kommen dagegen positive und negative Werte der Cosinusfunktion mit gleichem Gewicht vor; in der Doppelsumme überleben dann nur die Beiträge mit $i = j$.

Bei der kohärenten Streuung schwingen die einzelnen Dipole in Phase; dann überlagern sich die Felder kohärent und der Wirkungsquerschnitt erhält einen Faktor N^2 . Bei der inkohärenten Streuung addieren sich dagegen effektiv die Wirkungsquerschnitte (Faktor N).

Als Beispiel betrachten wir die Streuung von sichtbarem Licht am Wasserdampf in der Atmosphäre (also an einzelnen Wassermolekülen in Luft). Kohärent streuen können nur jeweils die Moleküle, die sich in einem Volumen befinden, das klein gegenüber λ^3 ist. Ansonsten ist die Streuung inkohärent.

Unter geeigneten Bedingungen (etwa bei einer Temperaturänderung) kondensiert der Wasserdampf, der in der Luft enthalten ist, zu Nebel oder Wolken. Die Kondensation beginnt mit Wassertropfen, deren Durchmesser d klein gegenüber der Wellenlänge ist. Als Beispiel betrachten wir einen kugelförmigen Tropfen mit dem Radius $d/2 = 200 \text{ \AA}$, der $N \approx 10^6$ Moleküle enthält¹. Wegen $d \ll \lambda$ streuen die N Moleküle dieses Tropfens kohärent.

Bei der Bildung eines Nebels aus kleinen Tropfen kommt es zum Übergang von inkohärenter zu kohärenter (innerhalb eines Tropfens) Streuung. Dies bedeutet eine Erhöhung des Streuquerschnitts um den Faktor N , also um mehrere Größenordnungen in obigem Beispiel. Obwohl die Menge des Wassers sich nicht ändert, wird die Luft plötzlich undurchsichtig, wenn ein Teil des Wasserdampfs zu Nebel kondensiert.

Da der Effekt proportional zu N ist, wächst er zunächst mit der Größe der Wassertropfen an. Sobald der Durchmesser d aber mit λ vergleichbar wird, schwingen die Moleküle in verschiedenen Bereichen des Tropfens nicht mehr kohärent; es tritt dann keine weitere Verstärkung ein. Eine gewöhnliche Wolke besteht aus Tropfen, deren Durchmesser d im Bereich von $2 \dots 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ liegen (also $d \gg \lambda$). Eine solche Wolke ist wegen der Brechung und Reflexion des Lichts (Kapitel 37) an der Oberfläche der vielen Wassertropfen undurchsichtig. Homogenes Wasser ist dagegen wieder relativ durchsichtig (Abbildung 34.4).

¹Das Volumen des Tropfens ist $V = \pi d^3/6 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ \AA}^3$. Ein Wassermolekül nimmt das Volumen $v = 18 \text{ cm}^3/6 \cdot 10^{23} \approx 30 \text{ \AA}^3$ ein. Hieraus folgt $N = V/v \approx 10^6$. Bei 100% Luftfeuchtigkeit und einer Temperatur von 20°C befinden sich in einem gleich großen Luftvolumen V nur etwa 30 Wassermoleküle.

Aufgaben

25.1 Klassisches Wasserstoffatom

Ein Elektron bewegt sich klassisch auf einer Kreisbahn mit Radius r um ein Proton; es wirke die Coulombkraft $\mathbf{F} = -e_r e^2/r^2$. Drücken Sie die Energie E und den Drehimpuls L als Funktion des Bahnradius r aus. Berechnen Sie die abgestrahlte Leistung P .

Die abgestrahlte Leistung führt zu einer Abnahme des Bahnradius $r(t)$. Stellen Sie eine Differenzialgleichung für $r(t)$ auf und integrieren Sie diese mit der Anfangsbedingung $r(0) = a_B$ (Bohrscher Radius). Schätzen Sie die Spiralzeit τ ab, nach der das Elektron auf das Proton fällt. Diskutieren Sie den zeitlichen Verlauf der Energie $E(t)$ und des Drehimpulses $L(t)$.

25.2 Strukturfunktion für kubisches Gitter

Der Formfaktor $F(\mathbf{q})$ eines kubischen Gitters aus $N = N_x N_y N_z$ Streuzentren ist

$$F(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^N \exp(i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_j = a(n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z)$$

wobei $j = (n_x, n_y, n_z)$ und $n_x = 0, 1, \dots, N_x - 1$ und so fort.

Berechnen Sie die Strukturfunktion $|F(\mathbf{q})|^2$. Bestimmen Sie die Richtungen der Intensitätsmaxima des Wirkungsquerschnitts $d\sigma/d\Omega \propto |F(\mathbf{q})|^2$ für $N \gg 1$.