Korrekturen[1] zur *Allgemeinen Relativitätstheorie*, 5. Auflage, 2006

Im Abschnitt „Hawking-Effekt" im Kapitel 48 (Seite 286 in der 5. Auflage) muss in der Angabe der Lebensdauer der Faktor $(M_\odot/M)$ ersetzt werden durch $(M/M_\odot)^3$.

Geplante Ergänzungen in der nächsten Auflage

In der nächsten Auflage sollen mögliche Quanteneffekte für SL etwas ausführlicher diskutiert werden. Dazu wird zunächst der Abschnitt „Hawking-Effekt" überarbeitet, und es gibt dann ein neues Kapitel im Anschluss an Kapitel 48 mit dem Titel „Massenuntergrenze für Schwarze Löcher?". Im letzten Abschnitt des neuen Kapitels gehen wir auch kurz auf die Frage der Erzeugung von SL am LHC (wird im Herbst 2008 gestartet) ein.

Auf den folgenden Seiten werden der überarbeitete Abschnitt „Hawking-Effekt" und das neue Kapitel wiedergegeben.

---

[1] Für wertvolle Hinweise bedanke ich mich bei Michael Gölles.

Hawking-Effekt

Tatsächlich gibt ein isoliertes Schwarzes Loch aufgrund des *Hawking-Effekts*[3] Strahlung ab. In dem starken Gravitationsfeld (kurz außerhalb des Schwarzschildradius) können virtuelle Teilchen-Loch-Paare dadurch reell werden, dass ein Teilchen in das Schwarze Loch fällt und das zugehörige Antiteilchen abgestrahlt wird. Da das ausgehende Antiteilchen Energie wegtransportiert, muss das SL gleichzeitig Energie (also Masse) verlieren.

Weitergehende Betrachtungen zeigen, dass die von SL aufgrund dieses Effekts abgegebenen Teilchen sich wie die Strahlung eines Schwarzen Körpers verhalten, also wie die Strahlung eines Körpers mit einer Temperatur T. Das Schwarze Loch emittiert also auch Photonen und Neutrinos, deren Energien einer Planckschen Verteilung mit dieser Temperatur folgen[4]. Aufgrund dieses Hawking-Effekts verliert ein isoliertes Schwarzes Loch kontinuierlich Masse.

Für diese Temperatur eines SL der Masse M erhält man

$$k_{\mathrm{B}} T = \frac{\hbar c^3}{8 \pi G M} \tag{48.18}$$

Dies bedeutet $T \approx (M_\odot / M)\, 10^{-6}\,\mathrm{K}$. Die Strahlungsleistung (Energie pro Zeit, äquivalent zu Masse pro Zeit) eines Körpers mit der Temperatur T ist wohlbekannt Aus der Verlustrate (Masse pro Zeit) ergibt sich eine endliche Lebensdauer τ des SL:

$$\tau = \frac{5120 \pi G^2 M^3}{\hbar c^4} \approx 10^{-16} \frac{M}{1\,\mathrm{kg}}\,\mathrm{s} \tag{48.19}$$

Ein „kleines“ SL von zum Beispiel 1 Gramm oder 1 Kilogramm würde nahezu augenblicklich zerstrahlen. Da dabei die Energie Mc^2 freigesetzt wird, ist das Ende eines solchen SL ein explosives Ereignis.

Für ein SL mit $M \approx M_\odot$ ergibt sich $\tau \sim 10^{66}$ Jahre. In diesem Fall ist die Abstrahlung ein völlig zu vernachlässigender Effekt, auch auf der Skala des Weltalter ($t_0 \approx 10^{10}$ Jahre). Praktisch werden derartige SL eher an Masse zulegen, indem sie Materie aus der Umgebung ansaugen.

Eine Lebensdauer $\tau \sim t_0$ von der Größe des Weltalters erhält man für ein Schwarzes Loch der Masse $M \sim 10^{12}\,\mathrm{kg}$ und der Größe von $r_{\mathrm{S}} = 2GM/c^2 \sim 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Solche kleinen Schwarzen Löcher könnten beim Urknall (Kapitel 54) entstanden sein, und ihr explosives Ende könnte dann heute beobachtet werden.

---

[3] S. W. Hawking, *Black hole explosions?*, Nature 248 (1974) 30

[4] In einer alternativen Betrachtung geht man von einem Beobachter aus, der kurz außerhalb des Schwarzschildradius ruht. Um seine Position zu halten, muss dieser Beobachter fortwährend beschleunigt sein. Ein Beobachter, der sich beschleunigt im Vakuum bewegt, beobachtet eine thermische Strahlung. Für den außenstehenden Beobachter wird diese Strahlung vom SL abgegeben.

49 Massenuntergrenze für Schwarze Löcher?

Es wird die Hypothese diskutiert, dass die minimale Masse eines Schwarzen Lochs von der Größe der Planckmasse ist. Dazu wird argumentiert, dass ein Teilchen nicht kleiner als seine Comptonwellenlänge sein kann. Dieses Argument wird am Beispiel des Elektrons näher beleuchtet. Am Ende des Kapitels wird diskutiert, ob an Beschleunigern kleine Schwarze Löcher erzeugt werden können. Der Inhalt dieses Kapitels gehört nicht zum Standardlehrstoff einer Einführung in die ART.

Einführung

Als klassische Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen kann es Schwarze Löcher (SL) mit beliebig kleiner Masse geben. Sie könnten im frühen Universum entstanden sein. SL sollten Strahlung abgeben (Hawkingstrahlung, Kapitel 48), dadurch (wenn sie isoliert sind) ihre Masse reduzieren und sich schließlich in einer Explosion auflösen.

Die Hawkingstrahlung berücksichtigt nur einen ausgewählten quantenfeldtheoretischen Aspekt. Quantenmechanische Effekte für das SL selbst werden dominant, wenn seine Comptonwellenlänge λ_{C} vergleichbar mit oder größer als sein Schwarzschildradius r_{S} ist. Dies ist soweit allgemein bekannt und akzeptiert (Diskussion am Ende von Kapitel 22). Im Folgenden wird dieser quantenmechanische Vorbehalt dahingehend konkretisiert, dass es für $\lambda_{\mathrm{C}} \gtrsim r_{\mathrm{S}}$ keine SL gibt. Wir diskutieren zunächst ganz allgemein, inwieweit lokalisierte (sehr kleine) Teilchen in quantenmechanisch-relativistischer Sicht überhaupt möglich sind.

Wenn ein Teilchen die Größe (etwa Durchmesser) ℓ hat, dann kann es in einen Bereich der Größe $\Delta x > \ell$ eingeschlossen werden. Umgekehrt, um festzustellen, dass ein Teilchen nur die Größe ℓ hat, muss man es auch in einem Bereich der Größe Δx lokalisieren können (mit welchen experimentellen Methoden auch immer). Beim Einschluss in einen Bereich der Größe Δx hat das Teilchen zwangsläufig Impulse der Größe $\Delta p \gtrsim \hbar/\Delta x$. Damit sind Energien der Größe $\Delta E \approx \Delta p\, c$ verbunden (wir betrachten sehr kleine Δx und damit den relativistischen Grenzfall der Energie-Impuls-Beziehung). Wenn nun $\Delta E \gtrsim 2Mc^2$ ist (wobei M die Ruhmasse des betrachteten Teilchens ist), dann kommt man in einen Bereich, in dem der Teilchenbegriff verschwimmt. Denn dann existieren im Bereich Δx nicht nur das eine betrachtete Teilchen, sondern zugleich weitere Teilchen oder Teilchen-Antiteilchenpaare.

Von einem definierten Teilchen kann man daher nur sprechen, solange $\Delta E = \hbar c/\Delta x \leq 2Mc^2$. Von einem SL der Größe $\Delta x = 2r_s$ und der Masse M_{SL} kann man daher nur sprechen, solange

$$\frac{\hbar c}{2r_s} \leq 2M_{SL}c^2 \tag{49.1}$$

Setzen wir hierin $r_S = 2GM_{SL}/c^2$ ein, so erhalten wir eine untere Grenze für die Masse eines SL:

$$\boxed{M_{SL} \geq \frac{M_P}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar c}{2G}}} \tag{49.2}$$

Diese Abschätzung kann die Grenzmasse natürlich nur bis auf einen Faktor der Größenordnung 1 angeben.

Die Vermutung einer solchen Untergrenze findet sich gelegentlich in der Literatur. Die Existenz einer solchen Untergrenze ist jedoch eine nicht allgemein akzeptierte Hypothese. Ein Grund hierfür dürfte sein, dass ähnliche Überlegungen für bekannte Teilchen, insbesondere für das Elektron, zu (scheinbar) abwegigen Resultaten führen.

Wendet man die vorgestellten Überlegungen auf ein Elektron an, dann kann das Elektron (Masse m_e) nicht besser als in einem Bereich der Compton-Wellenlänge

$$\lambda_{C,e} = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{cm} \tag{49.3}$$

lokalisiert werden. Quantenmechanisch-relativistisch ist dies an sich trivial: Wenn man ein Elektron auf einen Bereich kleiner als $\lambda_{C,e}$ begrenzt, dann entstehen zusätzlich Elektron-Positronpaare, so dass man nicht mehr von einem definierten Elektron sprechen kann. Insofern scheint auch der Nachweis eines Elektrons, das kleiner als λ_C ist, nicht möglich. Diese Aussage steht aber in Widerspruch zu Aussagen der Hochenergiephysik, wonach das Elektron sich im Experiment als punktförmiges Teilchen zeigt, oder jedenfalls als Teilchen, dessen Radius kleiner als 10^{-16} cm ist. Bevor wir mit der Diskussion der minimalen Masse eines SL fortfahren, klären wir diesen (scheinbaren) Widerspruch für das Elektron.

Punktförmiges Elektron?

Die Argumente der Einleitung sprechen dafür, dass das Elektron ein Teilchen mit einem Radius der Größe

$$R_C \sim \lambda_{C,e} = \frac{\hbar}{m_e c} \tag{49.4}$$

sein könnte, also mit dem Comptonradius R_C. Üblicherweise wird aber gesagt, dass das Elektron ein (nahezu) punktförmiges Teilchen mit einem Radius $R_{exp} < 10^{-16}$ cm ist. Diese Behauptung ist aber eine recht spezielle Weise, in der eine experimentelle Grenze für eine mögliche Abweichung von der Quantenelektrodynamik

(QED) angegeben wird. Die QED behandelt das Teilchen formal als Punktteilchen. Abweichungen hiervon könnten durch einen zusätzlichen Formfaktor $F(q)$ beschrieben werden, der im Wesentlichen die Fouriertransformierte einer inneren räumlichen Struktur des Elektrons ist ($F = 1$ für die räumliche Verteilung $\delta(\boldsymbol{r})$). Man findet nun eine Übereinstimmung zwischen der QED und dem Experiment bis hin zu den höchsten erreichbaren Impulsen $q_{\rm max}$, also $F = 1$ für $q \le q_{\rm max}$. Diese Übereinstimmung wird dann formuliert als „das Elektron hat eine Ausdehnung von weniger als $\hbar/q_{\rm max} = R_{\rm exp}$".

Fragen wir uns einmal ganz naiv, wie man den Radius R einer ausgedehnten Ladungsverteilung messen könnte. Am einfachsten erscheint die Messung durch die Streuung von elektromagnetischen Wellen an der Ladungsverteilung, denn: Für Wellenlängen $\lambda \gg R$ wird die Ladung als ganzes im elektromagnetischen Feld der Welle beschleunigt; dies ergibt den Thomson-Streuquerschnitt. Für Wellenlängen $\lambda \ll R$ werden verschiedene Teile der Ladungsverteilung in verschiedene Richtungen beschleunigt. Daher muss der Streuquerschnitt für $\lambda \lesssim R$ abfallen; die Stelle des Abfalls bestimmt dann die Größe R der Ladungsverteilung. Der experimentelle Streuquerschnitt für e-γ–Streuung fällt für $\lambda \lesssim R_{\rm C}$ deutlich ab. In dieser Weise erhält man die experimentelle Größe $R \sim R_{\rm C}$ für das Elektron.

Ein anderes Experiment für die Größe (oder Kleinheit) des Elektrons wäre die hochenergetische e-e–Streuung (Møller-Streuung). Betrachten wir dazu einen direkten (head-on) Zusammenstoß von zwei Elektronen, die beide den Impuls $|\boldsymbol{p}| = \gamma mc$ mit $\gamma \gg 1$ haben. Im Schwerpunktsystem (zugleich dem Laborsystem im colliding beam Experiment) kann man damit Strukturen bis zu der Größe $\Delta x = \hbar/|\boldsymbol{p}| = R_{\rm C}/\gamma$ auflösen. Wegen $\Delta x \ll R_{\rm C}$ könnte man schließen, dass die experimentelle Møller-Streuung innere Strukturen eines Elektrons der Größe (49.4) sehen müsste (und damit gegebenenfalls zu signifikanten Abweichungen von der QED führt). Aber: Im Schwerpunktsystem ist die Ausdehnung der beiden Elektronen zu $R_{\rm C}/\gamma$ lorentzverkürzt (in der relevanten Richtung). Eine mögliche innere Struktur im Bereich $r < R_{\rm C}$ kann daher durch hochenergetische e-e–Streuung nicht aufgelöst werden. Die Verifikation der QED-Vorhersagen für hohe Energien ist zwar nicht trivial, sie kann aber ein gemäß (49.4) ausgedehntes Elektron nicht ausschließen; dies gilt für beliebig hohe Energien. Die Gründe hierfür liegen in den grundlegenden quantenmechanischen und relativistischen Gesetzen; sie sind daher prinzipieller Natur.

Als quantenmechanische *und* relativistische Gleichung berücksichtigt die Dirac-Gleichung in spezifischer Weise, dass ein Elektron nicht besser als $R_{\rm C}$ lokalisiert werden kann. So führt sie im Rahmen der QED zu einem Streuquerschnitt for γ-e-Streuung, der für $\lambda < \lambda_{\rm C,e}$ abfällt. Im nichtrelativistischen Grenzfall reduziert sich die Dirac-Gleichung zur Schrödingergleichung mit drei relativistischen Korrekturtermen: Die Spin-Bahn-Wechselwirkung, eine relativistische Korrektur zur kinetischen Energie und der sogenannten Darwin-Term. Der Effekt des Darwin-Terms kann als *Zitterbewegung* beschrieben werden. Dieser Term schmiert effektiv die Schrödingersche Wellenfunktion über einen Bereich der Größe $R_{\rm C}$ aus.

Wir fassen zusammen: Dass Elektronen punktförmige Teilchen oder jedenfalls kleiner als 10^{-16} cm sind, ist eine eher unglücklich formulierte Aussage. In dem zugrunde liegenden theoretischen Rahmen hat diese Aussage eine präzise Bedeutung, nämlich keine Abweichung zwischen Experiment und QED für $q < q_{\mathrm{max}}$. Sie bedeutet jedoch nicht, dass Elektronen tatsächlich (nahezu) punktförmig sind (oder kleiner als $\hbar/q_{\mathrm{max}}$). Vielmehr gibt es einen Spielraum für Modelle, in denen das Elektron die Ausdehnung (49.4) hat. Bisher hat sich allerdings noch kein solches Modell durchgesetzt. Für einen frühen Versuch sei auf Diracs[1] „extensible electron“ verwiesen, für weitere Versuche auf Mac Gregors[2] “enigmatic electron“.

Schwarzes Loch im Bereich der Grenzmasse

Die Überlegungen des letzten Abschnitts bestärken uns darin, die in der Einleitung präsentierten grundlegenden quantenmechanisch-relativistischen Überlegungen zur Größe von Teilchen ernst zu nehmen. Danach haben wir bis auf Faktoren der Größe 1 die Untergrenze

$$M_{\mathrm{SL}} \geq M_{\mathrm{limit}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar c}{2G}} \approx 4 \cdot 10^{18}\,\frac{\mathrm{GeV}}{c^2} \tag{49.5}$$

für die Masse von SL erhalten. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass dies keine allgemein akzeptierte Aussage ist. In Lehrbüchern wird meist davon ausgegangen, dass es SL mit beliebig kleiner Masse geben kann. Auch die folgenden Überlegungen über die Annäherung an die Grenzmasse sind spekulativ.

Betrachten wir nun zunächst ein klassisches SL mit einer Masse, die deutlich über der Grenzmasse M_{limit} liegt. Ein solches SL wird nach den Überlegungen von Hawking strahlen und damit (wenn es isoliert ist) allmählich Masse verlieren. Eventuell in der Frühzeit des Universums entstandene SL könnten sich dadurch der Grenzmasse M_{limit} von oben nähern. Was passiert dann für $M_{\mathrm{SL}} \to M_{\mathrm{limit}}$?

Sobald die Comptonwellenlänge λ_{C} des SL mit dem Schwarzschildradius r_{S} vergleichbar wird, zum Beispiel für $\lambda_{\mathrm{C}} \sim r_{\mathrm{S}}/3$, werden Quantenfluktuationen wichtig. Dann wird der Schwarzschildhorizont nicht mehr eine statische Kugeloberfläche sein, sondern die Oberfläche wird auf der Skala λ_{C} fluktuieren oder wabern. Bei Annäherung an die Grenzmasse erscheinen zwei Szenarien naheliegend:

1. Für $\lambda_{\mathrm{C}} \to r_{\mathrm{S}}$ werden die Fluktuationen so stark, dass der geschlossene Schwarzschildhorizont sich auflöst und das SL instabil wird. Das SL könnte dann in einer Explosion enden. Die Signatur dieser Explosion wäre ein Energieausstoß der Größe $M_{\mathrm{limit}}\, c^2$.

2. Für $\lambda_{\mathrm{C}} \sim r_{\mathrm{S}}$ könnte es einen stabilen quantenmechanischen Grundzustand eines SL geben. Dieser würde dann nicht mehr strahlen.

[1] P. A. M. Dirac, *An extensible model of the electron*, Proc. R. Soc. London **A 268**, 57 (1962)
[2] M. H. Mac Gregor, *The Enigmatic Electron*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1992

Als Analogon betrachte man ein Teilchen in einem Kastenpotenzial. Solange die Comptonwellenlänge $\lambda_{C,T}$ des Teilchens klein gegenüber dem Radius R_K des Kastenpotenzials ist, kann das Teilchen klassisch behandelt werden. Da es sich im Potenzial beschleunigt bewegt, strahlt es und verliert Energie. Damit wächst $\lambda_{C,T}$ allmählich an. Für $\lambda_{C,T} \sim R_K$ stehen dann nur die quantenmechanischen Eigenzustände im Kasten zur Verfügung. Das Teilchen endet schließlich im Grundzustand, in dem es nicht mehr abstrahlt (davor kann es noch mehr oder weniger lange in einem der angeregten Zustände verweilen). In analoger Weise könnte sich die klassische Lösung des SL dem quantenmechanischen SL-Grundzustand nähern. (Während sich die Abstrahlung des klassischen Teilchens in der Anfangsphase klassisch beschreiben lässt, muss die Hawking-Strahlung von vornherein quantenfeldtheoretisch begründet werden).

Natürlich sind ein SL und ein Teilchen im Potenzial *sehr* verschiedene Systeme. Die Analogie beruht darauf, dass in beiden Systemen die quantenmechanische Wellenlänge sich durch Abstrahlung der charakteristischen Länge des Systems annähert.

Um die angesprochenen Möglichkeiten näher zu untersuchen, benötigt man eine Quantenfeldtheorie der Gravitation.

Erzeugung Schwarzer Löcher in Beschleunigern

Vor der Inbetriebnahme des LHC (Large Hadron Collider) in CERN im Herbst 2008 wurde vereinzelt die Befürchtung geäußert, dass bei den dort erzeugten hohen Energien kleine SL entstehen könnten, die schließlich durch Massenakkretion die ganze Erde verschlingen würden.

Nun sind die Energien am LHC (Hadronen mit Energien der Größe TeV $= 10^3$ GeV) viel niedriger als die, die in der kosmischer Strahlung (Teilchen mit Energien bis etwa 10^{14} GeV) vorkommen; insofern kann nichts erzeugt werden, was nicht ohnehin auch in der Erdatmosphäre erzeugt wird. Ein durch kosmische Strahlung erzeugtes SL hätte aber eine hohe Geschwindigkeit im Gegensatz zu einem im LHC in einer head on Kollision erzeugten. Das SL der kosmischen Strahlung würde dann die Erde ohne nennenswerten Massenzuwachs durchfliegen, weil seine Wechselwirkung (Gravitation) mit der Materie extrem klein ist. Im Unterschied dazu könnte ein im LHC erzeugtes SL im Gravitationsfeld der Erde gefangen sein, und hätte damit vielleicht genug Zeit, die Erde „aufzufressen“.

Nach der oben geführten Diskussion ist die Erzeugung von SL am LHC schon wegen des Massenlimits (49.2) nicht möglich. Beim Zusammenstoß zweier Hadronen fehlen wenigstens 15 Größenordnungen in der Energie. Es würde auch nicht helfen, wenn mehrere Hadronen an derselben Stelle kollidieren würden.

Allerdings kann die Erzeugung von SL unabhängig vom hier diskutierten Massenlimit ausgeschlossen werden; dazu sei auf die entsprechende CERN-Studie[3] verwiesen. Das Hauptargument beruht dabei nicht auf der zur Verfügung stehenden Energie; denn man denkt ja üblicherweise an SL auch mit Massen weit unterhalb von M_{P}. Vielmehr ist es die zur Verfügung stehende Energie*konzentration*: Gerade die ist für ein sehr kleines SL extrem hoch; denn die Ausdehnung eines SL der Masse M ist von der Größe $L_{\mathrm{P}}\, M/M_{\mathrm{P}}$ mit der Planckschen Länge $L_{\mathrm{P}} \approx 10^{-33}$ cm. Sowohl LHC wie auch andere denkbare Beschleuniger sind *sehr* viele Größenordnungen von solchen Energiekonzentrationen (oder Luminositäten) entfernt.

Es gibt noch einen anderen Limit, der die Harmlosigkeit eines kleinen SL belegt. Für ein kleines SL gibt es zwei konkurrierende Effekte: Zum einen nimmt seine Masse aufgrund der Hawking-Strahlung ab, zum anderen kann seine Masse durch Akkretion von Masse aus der Umgebung (während seiner Bewegung in der Erde) wachsen. Die Abschätzung[3] ergibt, dass der erste Effekt für $M < 10^{23}\, M_{\mathrm{P}}$ überwiegt (der zweite Effekt wird durch die sehr kleinen Gravitationswechselwirkung verursacht). Eventuelle SL mit $M < 10^{23}\, M_{\mathrm{P}}$ würden also von selbst zerstrahlen und schließlich im Inneren der Erde harmlos verpuffen. Erst ein schon recht gigantisches SL mit einer Masse von $10^{23}\, M_{\mathrm{P}}$ oder mehr hätte dagegen die Chance, die Erde „aufzufressen“.

Zusammenfassend stellen wir fest: Unsere Überlegungen ergeben eine Untergrenze $M_{\mathrm{limit}} \sim M_{\mathrm{P}}$ für die Masse eines SL, was die Erzeugung eines SL am LHC aus Energiegründen ausschließt. Die Ausschließungskriterien der CERN-Studie[3] für die Erzeugung eines SL (mangelnde Energiekonzentrationen am LHC) und für die mögliche Gefährdung durch ein SL (Massenzuwachs nur für $M > 10^{23}\, M_{\mathrm{P}}$) sind jedoch um viele Größenordnungen stärker. Zudem beruhen diese Ausschließungskriterien auf allgemein anerkannten Argumenten.

[3] J.-P. Blaizet, J. Iliopoulos, J. Madsen, G. G. Ross, P. Sonderegger, H.-J. Specht, *Study of potentially dangerous events during heavy-ion collisions at the LHC: Report of the LHC study group*, Genf 2003, http://doc.cern.ch/yellowrep/2003/2003-001/p1.pdf