Symmetrie und Erhaltungsgröße

Emmy Noethers Bedeutung für die Physik

von T. Fließbach

1. Zur Person Emmy Noether
2. Symmetrie und Erhaltungsgröße
   - Symmetrie
   - Erhaltungsgröße
   - Zusammenhang
   - Keplerproblem
3. Variationsproblem
   - Problemstellung
   - Euler-Lagrange-Gleichung
   - Symmetrie und Erhaltungsgröße
   - Brachistochrone
4. Naturgesetz als Variationsproblem
5. Noether-Theorem

[1] Schülervorlesung am 19.1.2000

Emmy Noether

Kurze Auszüge aus dem *Lexikon bedeutender Mathematiker*, B-I-Verlag Leipzig 1990:

Noether, Amalie Emmy: Geboren 23. 3. 1882 in Erlangen, Gestorben 14. 4. 1935 in Bryn Mawr (Pennsylvenia, USA). - Kind jüdischer Eltern und Tochter des bekannten Mathematikers Max Noether.

… konnte sie nur als Hospitantin Vorlesungen besuchen, bevor 1904 die Immatrikulation (für Frauen) in Erlangen gesetzlich möglich wurde. … Promotion 1908 bei P. Gordan …

1915 holten sie D. Hilbert und F. Klein nach Göttingen, das damals führende mathematische Zentrum. Trotz erwiesener Qualifikation gelang es Hilbert und Klein nicht, die Habilitation ihrer Kollegin durchzusetzen – erst 1919 fielen die Gesetzeshürden.

… Von den Faschisten geächtet, wurde N. aus rassistischen und politischen Gründen aus Deutschland vertrieben. Sie nahm 1933 eine Gastprofessur am Mädchencollege in Bryn Mawr an, wohin sie 1934 endgültig übersiedelte.

…

N.s wissenschaftliche Beiträge lassen sich in 3 Gruppen teilen: Invariantentheorie (1907–1919), allgemeine Idealtheorie (1920–1926) und nicht-kommutative Algebra (1927–1935).

…

… kam sie zu neuen Einsichten über Invarianten bei Variationsproblemen und zu dem berühmten Noether-Theorem. Dieses besagt eine Äquivalenz zwischen dem Vorhandensein von Symmetrien und der Existenz von Erhaltungsgrößen für das betrachtete physikalische System; es spielt in der theoretischen Physik eine wichtige Rolle.

N. gilt allgemein als die bis heute bedeutendste Mathematikerin.

…

Symmetrie und Erhaltungsgröße

Symmetrie

Symmetrie = Invarianz unter einer Operation

Beispiele für diskrete Symmetrien

Wort „neben“ , Schachbrett

Kubischer Kristall: Translation um eine Gitterkonstante
Drehung um 90°

Beispiele für kontinuierliche Symmetrien

Kugel: Drehung um beliebige Winkel
Drehinvarianz oder Isotropie

Gas oder Flüssigkeit (ohne Berücksichtigung einer Begrenzung):
Invarianz unter Verschiebungen (Homogenität)
Invarianz unter Drehungen (Isotropie)

Die kinetische Energie T_{kin} eines Teilchens

$$T_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

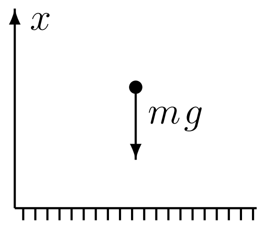
ist invariant unter

$$\begin{aligned} \text{Räumliche Verschiebung:} \quad & x \;\rightarrow\; x + x_0 \\ \text{Zeitliche Verschiebung:} \quad & t \;\rightarrow\; t + t_0 \end{aligned}$$

Dabei sind x_0 und t_0 kontinuierliche Parameter. Im Folgenden betrachten wir nur Symmetrien, die von einem kontinuierlichen Parameter abhängen.

Erhaltungsgröße

Erhaltungsgröße ist eine physikalische Größe, die zeitlich konstant ist.



Unter dem Einfluss der Schwerkraft fällt ein Körper senkrecht nach unten. Seine potentielle Energie ist $U_{\text{pot}} = mgx$. Gesucht ist die Bahn $x(t)$.

Bewegungsgleichung: $\quad m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg$

Energieerhaltung: $\quad E = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + mgx(t) = \text{const.}$

Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.
Die Lösung $x(t)$ enthält 2 Integrationskonstanten.

Erhaltungsgröße ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung.
Enthält bereits 1 Integrationskonstante. Die halbe Arbeit bis zur Lösung $x(t)$ ist bereits getan.

Energieerhaltung aus Newtons Axiom:

$m\ddot{x} = F(x)$ ergibt $m\ddot{x}\dot{x} = F\dot{x}$. Man setzt $F(x) = -dU_{\text{pot}}/dx$

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}^2}{2} = -\frac{dU_{\text{pot}}}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{dU_{\text{pot}}(x)}{dt}$$

Hieraus folgt $d\left(T_{\text{kin}} + U_{\text{pot}}\right)/dt = 0$ oder

$$T_{\text{kin}}(\dot{x}) + U_{\text{pot}}(x) = \text{Energie} = \text{const.}$$

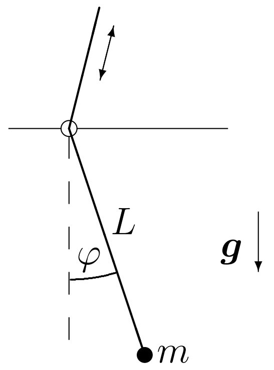
Diese Ableitung funktioniert nicht für $T_{\text{kin}}(\dot{x}, t)$ oder $U_{\text{pot}}(x, t)$.

Zusammenhang Symmetrie – Erhaltungsgröße

Falls $T_{\text{kin}}(\dot{x}, t)$ oder $U_{\text{pot}}(x, t)$ explizit zeitabhängig sind, gilt keine Energieerhaltung:

Anstoßen eines Teilchens: $F(x, t)$ oder $U_{\text{pot}}(x, t)$

Pendel mit variabler Länge: $T_{\text{kin}}(\dot{\varphi}, t) = \dfrac{m}{2}\, L(t)^2\, \dot{\varphi}^2 + \ldots$



Man kann ein Fadenpendel aufschaukeln, wenn man die Fadenlänge $L(t)$ in geeigneter Weise ändert. Hierdurch wird Energie auf das Pendel übertragen. Die Energie $T_{\text{kin}} + U_{\text{pot}}$ des Pendels ist nicht konstant.

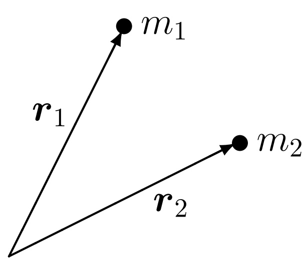
Fazit:
Wenn die Größen T_{kin} und U_{pot} invariant unter der Operation $t \to t + t_0$ sind, dann ist die Energie eine Erhaltungsgröße.

Dieser Zusammenhang gilt für beliebige Systeme. Analoge Zusammenhänge findet man auch für andere Symmetrien:

Zeittranslations-Invarianz	$\longrightarrow$	Energieerhaltung
Translations-Invarianz	$\longrightarrow$	Impulserhaltung
Dreh-Invarianz	$\longrightarrow$	Drehimpulserhaltung
Spezielle Symmetrie	$\longrightarrow$	Spezielle Erhaltungsgröße

Die ersten drei Voraussetzungen sind für *alle* abgeschlossenen Systeme erfüllt. Sie sind daher Eigenschaften unserer physikalischen Welt. Diese Symmetrien werden daher auch Homogenität und Isotropie des Raums, und Homogenität der Zeit genannt.

Keplerproblem



$\boldsymbol{r}_1 := (x_1, y_1, z_1)$
$\boldsymbol{r}_2 := (x_2, y_2, z_2)$

$$T_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}_2^2$$

$$U_{\text{pot}} = -\frac{G\,m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

Zwei Körper (Sonne und Planet) bewegen sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Schwerkraft. Gesucht sind die Bahnen $\boldsymbol{r}_1(t)$ und $\boldsymbol{r}_2(t)$.

Newtons Axiome: $m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \ldots$ und $m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \ldots$
6 DGL 2. Ordnung

↓ Translationsinvarianz, Operation $\boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a}$
Schwerpunktimpuls-Erhaltung: $\boldsymbol{P} = \sum_i m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i = \text{const.}$

Relativbewegung: $\mu\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \ldots$, wobei $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ und
3 DGL 2. Ordnung $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$

↓ Drehinvarianz, Operation $\boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r}_i + d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i$
Drehimpuls-Erhaltung: $\boldsymbol{\ell} = \mu\,\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \text{const.}$

Abstandsbewegung: $\mu\,\ddot{r} = \ldots$
1 DGL 2. Ordnung

↓ Zeittranslations-Invarianz, Operation $t \to t + t_0$
Energie-Erhaltung: $E = \text{const.}$

1 DGL 1. Ordnung für $r(t)$:

$$\boxed{E = \frac{\mu}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_{\text{pot}}(r)}$$

$$\boxed{E = \frac{\mu}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\,\mu\,r^2} + U_{\text{pot}}(r)}$$

Dieses Ergebnis ist eine DGL 1. Ordnung für $r(t)$. Sie kann nach $\dot{r} = dr/dt$ aufgelöst und integriert werden.

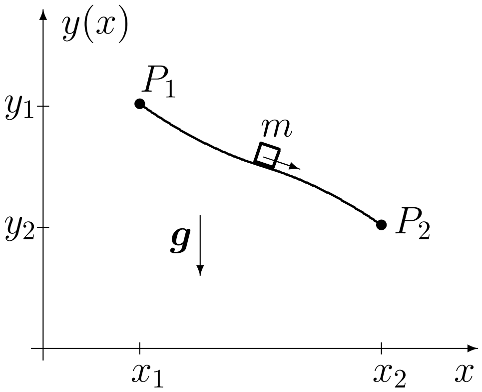
Aus der Lösung $r(t)$ und den Zwischenergebnissen folgen $\boldsymbol{r}_1(t)$ und $\boldsymbol{r}_2(t)$.

Dieselben Symmetrien werden bei der quantenmechanischen Behandlung des Wasserstoffatoms ausgenutzt.

Zusammenfassung:

Anhand eines einfachen Beispiels wurde der Zusammenhang zwischen einer Symmetrie und der zugehörigen Erhaltungsgröße demonstriert. Erhaltungsgrößen spielen eine hervorragende Rolle bei der Lösung physikalischer Probleme.

Variationsproblem



Auf welcher Kurve $y(x)$ kommt ein reibungsfrei gleitender Körper im Schwerefeld am schnellsten von P_1 nach P_2? Die Lösungskurve heißt Brachistochrone.

$$\text{FUNKTION } y(x): \qquad \text{Zahl } x \xrightarrow{y(x)} \text{Zahl } y$$

$$\text{FUNKTIONAL } J[y]: \qquad \text{Funktion } y(x) \xrightarrow{J[y]} \text{Zahl } J$$

Wegstrecke zwischen P_1 und P_2:

$$J[y] = \text{Wegstrecke} = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

Zeit T für Paketrutsche:

$$J[y] = T = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2\, g\, (y_1 - y(x))}}\, dx$$

Problemstellung

In der Variationsrechnung sucht man nach Extremalwerten des Funktionals, also etwa

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx = \text{minimal}$$

Dabei sind die Funktion $F(y, y', x)$ und die Randwerte $y_1 = y(x_1)$ $y_2 = y(x_2)$ gegeben. Gesucht wird $y(x)$.

Beispiele sind die kürzeste Wegstrecke zwischen zwei Punkten oder die optimale Paketrutsche. Oder Gewinnoptimierung: $y =$ Preis einer Ware, $x =$ Nachfrage und $J[y] =$ Gewinn $=$ maximal. Auch für $y = y(x_1, x_2, ...)$ lösbar.

Euler-Lagrange-Gleichung

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx = \text{minimal}$$

VERGLEICH

1. Für welchen Wert x wird $y(x)$ minimal?
2. Für welche Funktion $y(x)$ wird $J[y]$ minimal?

LÖSUNG

1. x sei die gesuchte Stelle. Wir betrachten kleine Abweichungen δx von dieser Stelle. Die zugehörige Abweichung δy muss dann verschwinden:

   $$\delta y = y(x + \delta x) - y(x) = y'(x)\, \delta x \stackrel{!}{=} 0$$

   Dies muss für beliebige δx gelten. Daraus erhalten wir die (notwendige) Bedingung $y'(x) = 0$ für die gesuchte Stelle.

2. Analog hierzu betrachten wir kleine Abweichungen $\delta y(x)$ von der gesuchten Funktion $y(x)$ und verlangen $\delta J = 0$:

   $$\begin{aligned} \delta J &= J[y + \delta y] - J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\, \delta y' \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x)\, dx \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Dies muss für beliebige $\delta y(x)$ gelten. Damit erhalten wir

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \qquad \text{Euler-Lagrange-Gleichung}}$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion $y(x)$. Die Euler-Lagrange-Gleichung ist eine notwendige Bedingung für $J = \text{minimal}$; sie ist äquivalent zu $\delta J = 0$.

Symmetrie und Erhaltungsgröße

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y} \qquad \text{Euler-Lagrange-Gleichung}}$$

Falls $F(\cancel{y}, y', x)$ nicht explizit von $y(x)$ abhängt, liegt eine Symmetrie vor, und zwar die

Invarianz unter der Operation $y \longrightarrow y + y_0$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung folgt dann sofort der Erhaltungssatz

$$\frac{\partial F(y',x)}{\partial y'} = \text{const.}$$

Diese ist eine DGL 1. Ordnung!

Für das Problem „Kürzeste Wegstrecke"

$$J[y] = \text{Wegstrecke} = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{F(y')}\, dx = \text{minimal}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.}$$

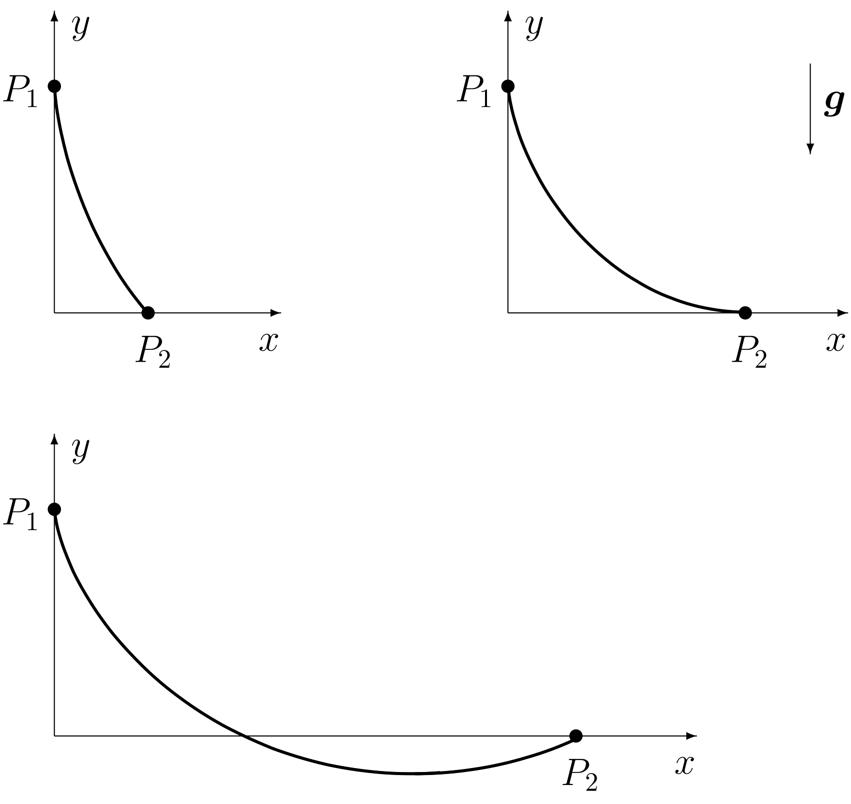
also $y'(x) = \text{const.}$ und damit – wie zu erwarten – eine Gerade $y(x) = ax + b$ als Lösung.

Brachistochrone

Zeit T für Paketrutsche:

$$J[y] = T = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2\,g\,(y_1 - y(x))}}}_{F(y,y')}\, dx$$

Hier hängt $F = F(y, y')$ nicht explizit von x ab. Daraus folgt die Erhaltungsgröße $y'\,(\partial F/\partial y') - F = \text{const}$. Die Lösung dieser Differentialgleichung 1. Ordnung sieht folgendermaßen aus:



Zusammenfassung:
Das Variationsproblem $J[y] = \int F(y, y', x)\, dx = \text{minimal}$ führt zu einer DGL 2. Ordnung für die gesuchte Funktion $y(x)$.

Naturgesetz als Variationsproblem

Wir betrachten das Variationsproblem

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)\, dt = 0$$

mit der sogenannten Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = T_{\text{kin}} - U_{\text{pot}} = \frac{m}{2}\, \dot{x}^2 - U_{\text{pot}}(x, t)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)}{\partial x}$$

oder

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = F(x, t)$$

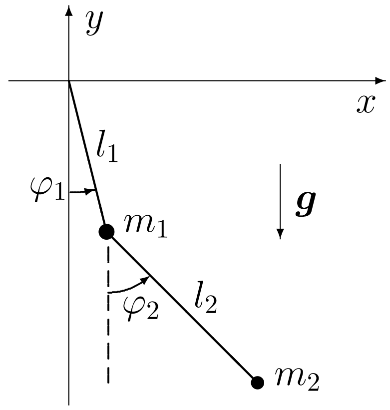
Der Ausgangspunkt $\delta \int \mathcal{L}\, dt = 0$ ist äquivalent zu diesem Newton'schen Axiom.

Der Ausgangspunkt heißt Hamilton'sches Prinzip:

$$\boxed{\text{Hamilton'sches Prinzip:} \quad \delta \int \mathcal{L}\, dt = 0}$$

Dies gilt auch für ein mechanisches System mit vielen Freiheitsgraden. Dann ist $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n, t)$. Darüberhinaus ist das Hamilton'sche Prinzip auch auf nichtmechanische Systeme anwendbar.

Der entscheidende Punkt ist, dass die Lagrangefunktion (für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden) relativ einfach anzugeben ist, während die direkte Aufstellung der Bewegungsgleichungen sehr schwierig sein kann.



Das ebene Doppelpendel hat nur zwei Freiheitsgrade. Trotzdem ist die direkte Aufstellung der Bewegungsgleichung für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ keineswegs einfach.

So kann etwa die kinetische Energie $t_{\text{kin}} = m_2\,(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)/2$ leicht angegeben werden, wenn man $x_2 = x_2(\varphi_1, \varphi_2)$ usw. aus der Abbildung abliest.

Viele Grundgleichungen der Physik können in der Form des Hamilton'schen Prinzips $\delta \int \mathcal{L}\, dt = 0$ angegeben werden. So sind zum Beispiel die freien Maxwellgleichungen die Euler-Lagrange-Gleichungen für

$$\mathcal{L} = \int d^3r\; (\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)$$

Dieses $\mathcal{L}$ ist der *einfachste* Ansatz, der den einschlägigen *Symmetrien* (Homogenität der Zeit, Isotropie des Raums und Relativität der Raum-Zeit) genügt. Diese Aussage (Einfachheits- und Symmetrieforderung) gilt entsprechend für andere Naturgesetze. Die Lagrangefunktion (oder Lagrangedichte, hier $L = \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2$) ist daher *der* Ausgangspunkt bei der Aufstellung neuer Theorien (etwa für eine Modifikation der Maxwellgleichungen).

Zusammenfassung:
Viele Naturgesetze lassen sich in der Form des Hamilton'schen Prinzips $\delta \int \mathcal{L}\, dt = 0$ schreiben. Der entscheidende Vorteil dabei ist, dass die Lagrangefunktion (oder die Lagrangedichte) meist (i) von besonders einfacher Form ist und (ii) die relevanten Symmetrien des Systems widerspiegelt.

Noether-Theorem:

Jede kontinuierliche Symmetrie führt zu einer Erhaltungsgröße.

Die Freiheitsgrade eines mechanischen Systems mögen durch die Koordinaten $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ (im Folgenden durch x abgekürzt) beschrieben werden. Dies können zum Beispiel die kartesischen Koordinaten von N Teilchen sein, oder die Winkel φ_1 und φ_2 des Doppelpendels.

Das System werde durch die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ repräsentiert.

Wir betrachten eine sehr allgemeine, kontinuierliche Transformation

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \epsilon\, \psi_i(x, \dot{x}, t) \\ t^* &= t + \epsilon\, \varphi(x, \dot{x}, t) \end{aligned}$$

Das Noether-Theorem besagt nun

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Symmetrie:} & & \text{Erhaltungsgröße:} \\ \mathcal{L}^* = \mathcal{L} & \xrightarrow{\text{Noether}} & Q = Q(x, \dot{x}, t) = \text{const.} \end{array}}$$

Die Erhaltungsgröße lautet

$$\boxed{Q = Q(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\, \psi_i + \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\, \dot{x}_i \right) \varphi = \text{const.}}$$

Dies ist eine DGL 1. Ordnung.

Beispiel: Die Transformation $t^* = t + \epsilon$ und $x_i^* = x_i$ (Zeittranslation) bedeutet $\varphi = 1$ und $\psi_i = 0$. Wenn das System hierunter invariant ist, dann folgt

$$Q = \left(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\, \dot{x}_i \right) = \text{const.}$$

$$-Q = \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\, \dot{x}_i - \mathcal{L}\Big) = \text{const.}$$

Für

$$\mathcal{L} = \sum \frac{m_i}{2}\, \dot{x}_i^2 - U_{\text{pot}}(x_1,\ldots,x_n)$$

gilt $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ und man erhält

$$-Q = \sum \frac{m_i}{2}\, \dot{x}_i^2 + U_{\text{pot}}(x_1,\ldots,x_n) = \text{const.}$$

Das Verdienst Emmy Noethers liegt in der sehr allgemeinen Formulierung der Beziehung zwischen Symmetrien (Invarianzen gegenüber Transformationen) und den Erhaltungsgrößen (den Invarianten der Bewegung).

Das Noether-Theorem gilt insbesondere auch für Feldtheorien. In komplexen Theorien (etwa mehrere, miteinander gekoppelte Felder) ist oft nicht von vornherein klar, welche Größe die Energie beschreibt. Mit Noether kann aber etwa die Energie immer als die Größe identifiziert werden, die sich aus der Zeittranslationsinvarianz ergibt.

Zusammenfassung:

Viele Naturgesetze können in der Form des Hamilton'schen Prinzips $\delta \int \mathcal{L}\, dt = 0$ angegeben werden. Physiker favorisieren diese Formulierung, weil die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ meist eine besonders einfache Funktion ist, die die Symmetrien des Systems widerspiegelt.

Die Symmetrien und die zugehörigen Erhaltungsgrößen spielen eine hervorragende Rolle in der Physik. Das Noether-Theorem drückt den Zusammenhang zwischen den Symmetrien und den Erhaltungsgrößen in großer Allgemeinheit aus.

Emmy Noether, 1882 – 1935

Anmerkungen

Seite 2 Nach der Promotion arbeitete Emmy Noether einige Jahre ohne Anstellung am Mathematischen Institut der Universität Erlangen.

1922 erfolgte dann die Ernennung zum a. o. Professor und 1923 die Erteilung eines Lehrauftrags, womit erstmals ein geringes festes Einkommen verbunden war.

Emmy Noether starb unerwartet einige Tage nach einer Operation.

Seite 5 Die allgemeinen Symmetrien des Raums und der Zeit bedeuten insbesondere auch: Die Vorgänge im abgeschlossenen System hängen nicht davon ab, an welcher Stelle sich das System befindet oder wie es orientiert ist, und das System funktioniert heute in gleicher Weise wie morgen.

Neben der Homogenität und Isotropie des Raums und Homogenität der Zeit fehlt die *Relativität der Raum-Zeit*. Damit ist die Invarianz unter einer speziellen Galileitransformation gemeint, also die Invarianz unter der Transformation $x \to x + v_0 t$ mit einem Parameter v_0. Dieser Punkt wird in der Anmerkung zu Seite 14/15 aufgegriffen.

Seite 7 Bei der quantenmechanischen Behandlung des Wasserstoffatoms erlauben die Symmetrien den Übergang von einer partiellen DGL (schwierig) zu einer gewöhnlichen DGL (einfach).

Symmetrie in der Quantenmechanik: Der Hamiltonoperator vertauscht mit dem Symmetrieoperator, z.B. $[H, p_{\text{op}}] = 0$ für ein translationsinvariantes System (etwa für $H = p_{\text{op}}^2/2m$, wobei $p_{\text{op}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$). Die Impulsverteilung ist dann konstant. (Das bedeutet $|\phi(p,t))|^2$ = zeitlich konstant, wobei $\phi(p,t)$ die Wellenfunktion in der Impulsdarstellung ist).

Seite 8 $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \Delta y^2/\Delta x^2}\,\Delta x$ wird zu $\sqrt{1 + y'^2}\,dx$

Der Energiesatz $mv^2/2mg(y_1 - y)$ ergibt $v = \sqrt{2g(y_1 - y)}$.

Die beiden Integrationskonstanten in der Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung werden durch die vorgegebenen Randpunkte P_1 und P_2 festgelegt.

Seite 11 Zur Brachistochrone: Der Erhaltungssatz $y'\,\partial F/\partial y' - F = \text{const.}$ entspricht der Energieerhaltung. Man geht von diesem Erhaltungssatz aus.

Die Endpunkte seien durch $P_1 = (0, b)$ und $P_2 = (a, 0)$ gegeben. Die Lösung kann in der Form

$$y = b - c\sin^2\psi \quad \text{und} \quad x = c\,(\psi - \sin\psi\cos\psi)$$

angegeben werden (Parameterdarstellung einer Zykloide, mit dem Parameter ψ). Die Konstante c ist so festzulegen, dass die Kurve auch durch P_2 geht.

Das Problem der Brachistochrone wurde 1696 von Jakob Bernoulli formuliert und gelöst.

Seite 12 Es gelten die Entsprechungen

$x(t) \leftrightarrow y(x)$ und $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) \leftrightarrow F(y, y'.x)$

Seite 12 Man betrachtet zunächst den allgemeinen Ansatz $L = L(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, t)$ für die Lagrangedichte L. Wegen der Homogenität der Zeit sollte L nicht explizit von der Zeit abhängen, also $L = L(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$. Wegen der Isotropie des Raums sollte L nur von Größen abhängen, die sich bei Drehungen nicht ändern, also $L = L(\boldsymbol{E}^2, \boldsymbol{B}^2)$. (Eine Abhängigkeit von $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ wird ausgeschlossen, weil diese Größe nicht invariant unter Spiegelungen ist). Nur $\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2$ ist invariant unter Lorentztransformationen. Wegen der Relativität der Raum-Zeit sollte die Lagrangedichte daher von der Form $L = L(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)$ sein. Der einfachste Ansatz ist dann $L = \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2$. Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen sind die freien Maxwellgleichungen.

Seite 14/15 Formal und vollständig ist die Zeittranslation als

$x_i^*(t^*) = x_i(t)$ und $t^*(t) = t + \epsilon$

anzuschreiben. Für die zueinander gehörigen Zeitwerte (t und t^*) muss die Koordinate (etwa der Ort des Teilchens) denselben Wert haben, also $x_i^*(t^*) = x_i(t)$.

Die **Galilei-Transformation** $x \longrightarrow x + v_0\, t$ lässt zwar die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -U'$ ungeändert, nicht aber die Lagrangefunktion $\mathcal{L} = m\dot{x}^2/2 - U(x)$.

Die oben angeführte Invarianzbedingung $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ ist eine Vereinfachung (die für viele Fälle ausreicht). Da $\delta \int \mathcal{L}\, dt = 0$ äquivalent zu den Bewegungsgleichungen ist, lautet die korrekte Invarianzbedingung $\delta \int \mathcal{L}^*\, dt^* = \delta \int \mathcal{L}\, dt$. Diese Invarianzbedingung kann noch zu

$$\delta \int_{t_1^*}^{t_2^*} \mathcal{L}^*\, dt^* = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{L} + \frac{df(x,t)}{dx} \right) dt \qquad \text{(Symmetrie)}$$

mit einer beliebigen Funktion $f(x,t)$ verallgemeinert werden. Das Zeitintegral über den Zusatzterm ergibt $f(x,t)|_1^2$. Bei der Variation verschwindet dieser Term, weil die Randpunkte festgehalten werden. Die verallgemeinerte Invarianzbedingung führt zur Erhaltungsgröße

$$Q' = Q - f = \text{const.} \qquad \text{(Erhaltungsgröße)}$$

wobei Q die oben angegebene Erhaltungsgröße ist.

Die Galilei-Transformation $x \longrightarrow x + v_0\, t$ erfüllt die verallgemeinerte Invarianzbedingung. Für ein mechanisches System aus vielen Teilchen (Transformation $x_i \longrightarrow x_i + v_0\, t$) ist die zugehörige Erhaltungsgröße $Q = \dot{X}\, t + X = \text{const.}$, wobei X die x-Koordinate des Schwerpunkts ist. Praktisch bietet diese Erhaltungsgröße keinen besonderen Nutzen, da die Erhaltung des Schwerpunktimpulses (für ein abgeschlossenes System) bereits unmittelbar zur Lösung der Schwerpunktbewegung führt.

Es gibt noch andere bekannte Symmetrien, für die man von der verallgemeinerten Invarianzbedingung ausgehen muss. Dazu gehören insbesondere die speziellen Symmetrien des 3-dimensionalen Oszillators (SU(3)) und des Keplerproblems (O(4), Runge-Lenz-Vektor). Siehe etwa Lévy-Leblond in Am. J. Physics **39** (1971) 502.