9 Relativistische Mechanik

Die bisher behandelte Newtonsche Mechanik gilt nur für Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. In diesem Kapitel stellen wir die relativistische Mechanik (auch Einsteinsche Mechanik genannt) vor.

Zunächst ersetzen wir die Galileitransformationen durch die Lorentztransformationen. Danach gehen wir auf die Messung von Längen und Zeiten ein. Schließlich stellen wir die relativistische Verallgemeinerung des 2. Newtonschen Axioms auf und geben einige Konsequenzen an.

Lorentztransformationen

Newtons Axiome sind nur in Inertialsystemen (IS) gültig. Unter den möglichen IS ist keines ausgezeichnet, es gilt das von Galilei aufgestellte

RELATIVITÄTSPRINZIP: „Alle Inertialsysteme sind gleichwertig."

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik vermitteln die *Galileitransformationen* zwischen verschiedenen IS. Überraschenderweise stellt man jedoch experimentell fest (Michelsonversuch), dass Licht sich in IS und IS$'$ mit der gleichen Geschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s bewegt. Dies steht im Widerspruch zur Galileitransformation, denn

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{Galileitransformation}]{x' = x - vt,\;\; t' = t} \qquad \frac{dx}{dt} = c + v \tag{9.1}$$

Einstein ergänzt das Relativitätsprinzip „Alle Inertialsysteme sind gleichwertig" durch die Forderung, dass Licht sich in allen IS mit derselben Geschwindigkeit c bewegt. Dies erfordert eine andere Transformation zwischen den IS:

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{Lorentztransformation}]{c^2dt'^2 - dx'^2 = c^2dt^2 - dx^2} \qquad \frac{dx}{dt} = c \tag{9.2}$$

Die Bedingung $c^2dt'^2 - dx'^2 = c^2dt^2 - dx^2$ garantiert die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die gesuchte Lorentztransformation (LT) wird nun so bestimmt, dass sie das Wegelement $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$ oder allgemeiner

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{9.3}$$

invariant lässt. Wir verwenden die Summenkonvention, das heißt über gleiche Indizes wird summiert, ohne dass die Summe explizit angeschrieben wird. Außerdem ist $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ und $\eta = (\eta_{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$. Im folgenden verwenden wir auch untenstehende Indizes $(x_\alpha) = (\eta_{\alpha\beta}\, x^\beta) = (ct, -x, -y, -z)$.

Die gesuchte LT wird als *lineare* Transformation der Koordinaten angesetzt:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta\, x^\beta + b^\alpha \qquad \text{(Lorentztransformation)} \tag{9.4}$$

Die Größen Λ^α_β und b^α hängen von der Relation zwischen IS und IS$'$ ab, nicht aber von den Koordinaten.

Aus der Invarianzforderung ($ds^2 = ds'^2$) folgt eine spezielle LT (mit $y' = y$ und $z' = z$)

$$\begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\, v/c \\ -\gamma\, v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t \\ x \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

mit der *Rapidität* $\psi = \mathrm{artanh}\,(v/c)$ und $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Wenn die Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zwischen IS und IS$'$ eine beliebige Richtung hat, dann lautet die LT (in Matrixschreibweise)

$$\Lambda(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\, v_1/c \quad -\gamma\, v_2/c \quad -\gamma\, v_3/c \\ -\gamma\, v_1/c & \\ -\gamma\, v_2/c & \delta_{ij} + \dfrac{v_i\, v_j\,(\gamma - 1)}{v^2} \\ -\gamma\, v_3/c & \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

Eine allgemeine LT mit $\boldsymbol{v}$, mit Drehung ($\Lambda_{ij} = \alpha_{ij}$ mit einer orthogonalen Matrix α) und mit einer Raum-Zeit-Verschiebung um b lautet dann

$$x' = \Lambda(\alpha)\, \Lambda(\boldsymbol{v})\, x + b \tag{9.7}$$

Diese LT bilden eine Gruppe, die von 10 Parametern (drei Komponenten v_i, drei Winkel für die Drehung und vier Parameter in b) abhängt.

Die Addition zweier Geschwindigkeiten ergibt sich aus

$$\Lambda(\boldsymbol{V}) = \Lambda(\boldsymbol{v}_2)\, \Lambda(\boldsymbol{v}_1) \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \tag{9.8}$$

Für $\boldsymbol{v}_1 \parallel \boldsymbol{v}_2$ multiplizieren wir die beiden Λ-Matrizen

$$\begin{pmatrix} \cosh\psi_2 & -\sinh\psi_2 \\ -\sinh\psi_2 & \cosh\psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\psi_1 & -\sinh\psi_1 \\ -\sinh\psi_1 & \cosh\psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

und erhalten so $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Mit dem Additionstheorem für den tangens hyperbolicus wird $\psi = \psi_1 + \psi_2$ zum *Additionstheorem* der Geschwindigkeiten

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1\, v_2/c^2} \qquad \text{für } \boldsymbol{v}_1 \parallel \boldsymbol{v}_2 \tag{9.10}$$

Für nichtparallele Geschwindigkeiten ist das Additionstheorem komplizierter und nichtkommutativ.

Längen- und Zeitmessung

Die IS-Koordinaten x, y und z werden durch ruhende Maßstäbe als Längen definiert. Synchronisierte, ruhende Uhren können überall in IS die IS-Zeit t anzeigen.

Bewegter Maßstab

In IS′ ruhe ein Maßstab entlang der x'-Achse; er hat dann die *Eigenlänge* $l_0 = x'_2 - x'_1$. IS′ bewege sich mit $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x$ relativ zu IS; die x- und die x'-Achse seien parallel. Um die Länge l des Stabs in IS zu bestimmen, müssen zwei Beobachter im IS zur gleichen IS-Zeit t die Position von Stabanfang und -ende auf der x-Achse markieren; dann gilt $l = x_2 - x_1$. Die spezielle LT ist auf die beiden Ereignisse

1: Stabende passiert einen Beobachter in IS bei $x_1 = 0$ zur Zeit $t_1 = 0$.

2: Stabanfang passiert einen Beobachter in IS bei x_2 zur Zeit $t_2 = 0$.

anzuwenden. Dadurch erhält man $l = l_0\,\sqrt{1 - v^2/c^2}$, also $l < l_0$. Senkrecht zur Relativgeschwindigkeit tritt keine Längenkontraktion ein. Daher gilt im allgemeinen Fall

$$l_\parallel = l_{0\parallel}\,\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}\,, \qquad l_\perp = l_{0\perp} \qquad \text{(Längenkontraktion)} \tag{9.11}$$

Die Formulierung „Bewegte Stäbe sind kürzer“ stellt das Resultat nur unvollständig dar und lädt zu Missdeutungen ein. Es müssen immer die zu einer Messung gehörenden Ereignisse definiert werden; hierauf kann dann die Lorentztransformation angewendet werden.

Bewegte Uhr

Eine in IS′ ruhende Uhr zeigt die Zeit t' an. Um dies mit der IS-Zeit t zu vergleichen, muss die IS′-Uhr mit zwei IS-Uhren verglichen werden:

1: IS′-Uhr passiert Beobachter in IS bei $x_1 = 0$ zur Zeit $t_1 = 0$.

2: IS′-Uhr passiert Beobachter in IS bei $x_2 = v\,t_2$ zur Zeit t_2.

Vergleicht man jetzt die Zeitintervalle $t = t_2 - t_1$ und $t' = t'_2 - t'_1$, so stellt man eine Zeitdilatation fest:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2/c^2}} \qquad \text{Zeitdilatation} \tag{9.12}$$

Die Formulierung „Eine bewegte Uhr geht langsamer“ ist problematisch. Ohne den hier gegebenen Hintergrund könnte man daraus folgern „die IS′-Uhr geht langsamer als die IS-Uhr“ und (da vom IS′ aus gesehen IS bewegt ist) „die IS-Uhr geht langsamer als die IS′-Uhr“; damit hätte man einen Widerspruch konstruiert. Für die hier betrachtete Messung sind zwei Uhren in IS nötig, an denen sich die IS′-Uhr vorbeibewegt; insofern ist die Symmetrie zwischen IS und IS′ verletzt.

Wir geben noch an, welche Zeit τ eine mit beliebiger Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ bewegte Uhr anzeigt. Dazu betrachtet man zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 ein IS′, das sich relativ zu IS mit der (konstanten) Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t_0)$ bewegt. Dann gilt für das nächste Zeitintervall $d\tau = dt' = dt/\gamma$. Wenn man die endliche Zeitspanne zwischen zwei Ereignissen 1 und 2 in infinitesimale Intervalle teilt, so erhält man die angezeigte *Eigenzeit* der bewegten Uhr:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} \tag{9.13}$$

Als Anzeige einer konkreten Uhr ist τ unabhängig vom Beobachter (also vom IS). Formal folgt das aus $d\tau = ds_{\text{Uhr}}/c$ und der Invarianz von ds unter LT.

Gleichzeitigkeit

Das Abstandsquadrat s_{12}^2 zweier Ereignisse ist invariant unter LT. Daher hängt die Klassifizierung

$$s_{12}^2 = c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{lichtartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \\ > 0 & \text{zeitartig} \end{array} \right. \tag{9.14}$$

nicht vom Beobachter ab. Lichtartige Ereignisse können durch ein Lichtsignal miteinander verbunden sein; sie könnten sich kausal beeinflusst haben. Zeitartige Ereignisse können durch ein Objekt mit $V < c$ miteinander verbunden sein; auch sie könnten sich kausal beeinflusst haben. In diesen beiden Fällen liegt die zeitliche Reihenfolge der beiden Ereignisse fest.

Raumartige Ereignisse können nur durch ein Objekt mit $V > c$ verbunden werden; sie können sich kausal nicht beeinflusst haben. Ihre zeitliche Reihenfolge hängt vom Beobachter ab. Insofern ist der Begriff „gleichzeitig“ relativ.

Bewegungsgleichung

Die relativistische Verallgemeinerung des 2. Newtonschen Axioms lautet

$$m\,\frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \tag{9.15}$$

Dabei ist $(u^\alpha) = \gamma(c, \boldsymbol{v})$ die Vierergeschwindigkeit und m ist die Ruhmasse. Die Minkowskikraft F^α wird so gewählt, dass sie im momentanen Ruhsystem zur Newtonschen Kraft $\boldsymbol{F}_{\text{N}}$ wird, also $(F'^\alpha) = (0, \boldsymbol{F}_{\text{N}})$. Durch eine Lorentztransformation erhalten wir hieraus den Zusammenhang

$$\big(F^\alpha\big) = \left(\gamma\ \frac{v\, F_{\text{N}\parallel}}{c}\,,\ \gamma\, \boldsymbol{F}_{\text{N}\parallel} + \boldsymbol{F}_{\text{N}\perp}\right) \tag{9.16}$$

Die Gültigkeit von (9.15) ergibt sich aus: (i) Die Gleichung ist kovariant und (ii) sie reduziert sich im momentanen Ruhsystem IS′ auf das 2. Axiom. Wir setzen voraus, dass Newtons 2. Axiom in IS′ relativistisch gültig ist. Dann ist auch (9.15) in IS′ gültig. Da (9.15) kovariant (forminvariant unter LT) ist, erübrigt sich eine LT in ein anderes IS.

Für ein Teilchen (Masse m, Ladung q) in einem elektromagnetischen Feld wird (9.15) zu

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v(t)^2/c^2}} \;=\; q\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{9.17}$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\,\boldsymbol{v}(t)}{\sqrt{1-v(t)^2/c^2}} \;=\; q\,\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\right) \tag{9.18}$$

Für ein elektrostatisches Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\boldsymbol{r})$ können wir (9.17) in die Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v(t)^2/c^2}} + q\,\Phi(\boldsymbol{r}(t))\right) = 0 \tag{9.19}$$

bringen. Der Klammerausdruck ist eine Energie; insbesondere ist $q\,\Phi$ als elektrostatische Energie bekannt. Diese Gleichung beschreibt also die Energieerhaltung. Daher ist

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \text{relativistische Energie} \tag{9.20}$$

die *relativistische Energie* eines freien Teilchens. Sie kann in die Ruhenergie $m\,c^2$ und die kinetische Energie $mc^2(\gamma-1)$ aufgespalten werden. Die Identifizierung der Ruhenergie ist die Grundlage der *Äquivalenz von Masse und Energie*. .

Anwendung

Im Laborsystem (LS) laufe ein Teilchen (Masse m) mit der Geschwindigkeit V auf ein zweites ruhendes Teilchen gleicher Art zu. Durch eine LT kann man in das Schwerpunktsystem (SS) gehen, in dem die Teilchen die Geschwindigkeiten v und $-v$ haben. Für die kinetischen Energien, die jeweils aufgebracht werden müssen, gilt

$$K_{\rm LS} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - m\,c^2\,, \qquad K_{\rm SS} = \frac{2\,m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 2\,m\,c^2 \tag{9.21}$$

Die Geschwindigkeiten hängen über $\psi(V) = 2\,\psi(v)$ zusammen. Im hochrelativistischen Fall erhalten wir hieraus

$$K_{\rm LS} \approx \frac{(K_{\rm SS})^2}{2\,m\,c^2} \qquad \big(\,\psi(v)\gg 1\big) \tag{9.22}$$

Um ein Teilchen der Masse $100\,\mathrm{GeV}/c^2$ (etwa ein Z_0) zu erzeugen, benötigt man mindestens eine Energie $K_{\mathrm{SS}} = 100\,\mathrm{GeV}$. Dieses Experiment ist realisierbar, indem Elektronen mit 50 GeV und Positronen mit 50 GeV aufeinander geschossen werden (colliding beam). Aus (9.22) mit $mc^2 \approx 0.5\,\mathrm{MeV}$ folgt hierfür aber $K_{\mathrm{LS}} = 10^7\,\mathrm{GeV}$; das Experiment ist daher im Laborsystem undurchführbar.

Lagrangefunktion

In (2.20) wurde die nichtrelativistische Lagrangefunktion für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld angegeben. Die zugehörige relativistische Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} - q\,\Phi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \tag{9.23}$$

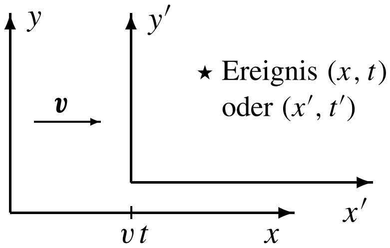
Hieraus folgen die Bewegungsgleichungen (9.18).

Wir setzen den verallgemeinerten Impuls $\boldsymbol{p} = \partial\mathcal{L}/\partial\boldsymbol{v} = \gamma m \boldsymbol{v} + (q/c)\,\boldsymbol{A}$ in die Hamiltonfunktion $H = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - \mathcal{L}$ ein und erhalten

$$H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)^2} + q\,\Phi(\boldsymbol{r}, t) \tag{9.24}$$

Aufgaben

9.1 Inverse Lorentztransformation



Die spezielle Lorentztransformation $x' = x'(x, t)$ und $t' = t'(x, t)$ zwischen zwei Inertialsystemen wird als bekannt vorausgesetzt. Wie lautet die zugehörige Rücktransformation? Drücken Sie das Ergebnis alternativ durch die Geschwindigkeit v oder die Rapidität ψ aus.

Lösung: Die spezielle Lorentztransformation $x' = x'(x, t)$ und $t' = t'(x, t)$ ist durch (9.5) gegeben. Die Rücktransformation erhält man daraus durch die Ersetzungen $\psi \to -\psi$ oder $v \to -v$, also

$$\begin{pmatrix} c\,t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\,v/c \\ \gamma\,v/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\psi = \operatorname{artanh}(v/c)$ und $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

9.2 Matrixschreibweise für Wegelement

Schreiben Sie die Lorentztransformation

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, dx^{\beta}$$

in Matrixschreibweise an. Werten Sie in dieser Schreibweise die Bedingung $ds^2 = ds'^2$ für das Minkowski-Wegelement aus.

Lösung: Die Lorentztransformation für die Koordinatendifferenziale lautet in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} dx'^0 \\ dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad dx' = \Lambda\, dx$$

Wir berechnen zunächst das Wegelement ds^2 im Inertialsystem IS,

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - d\boldsymbol{r}^2 = dx^{\mathrm{T}}\,\eta\,dx \quad \text{mit der Matrix} \quad \eta = \operatorname{diag}\big(1, -1, -1, -1\big)$$

Wir berechnen nun ds'^2 im Inertialsystem IS′, wobei wir $dx'^{\mathrm{T}} = (\Lambda\,dx)^{\mathrm{T}} = dx^{\mathrm{T}}\Lambda^{\mathrm{T}}$ verwenden:

$$ds'^2 = dx'^{\mathrm{T}}\eta\,dx' = dx^{\mathrm{T}}\,\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\,\Lambda\,dx \overset{!}{=} dx^{\mathrm{T}}\,\eta\,dx = ds^2$$

Die Invarianz $ds^2 = ds'^2$ setzt voraus, dass die Transformationsmatrix Λ die Bedingung

$$\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\,\Lambda = \eta$$

erfüllt. Bei orthogonalen Transformationen lautet die analoge Bedingung $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = 1$.

9.3 Lebensdauer von Myonen

Myonen werden in einer Höhe von etwa $h \approx 30\,\text{km}$ durch kosmische Strahlung erzeugt. In ihrem Ruhsystem haben die Myonen eine Lebensdauer $\tau \approx 2 \cdot 10^{-6}\,\text{s}$. Trotz dieser Höhe und ihrer kurzen Lebensdauer ($c\tau \approx 600\,\text{m}$) erreichen sie noch zum größten Teil die Erdoberfläche.

Wie klein darf die Abweichung $\varepsilon = (c - v)/c \ll 1$ der Geschwindigkeit der Myonen von der Lichtgeschwindigkeit höchstens sein, damit sie auf der Erdoberfläche beobachtet werden können? Was misst ein Beobachter im Ruhsystem des Myons für die Höhe h?

Lösung: Der Beobachter auf der Erdoberfläche befindet sich näherungsweise in einem Inertialsystem (IS). Relativ hierzu stellt das Myon eine mit Geschwindigkeit v bewegte Uhr dar. Eine von der Uhr angezeigte Zeitspanne t_0 ergibt die in IS gemessene Zeitspanne t. Nach (9.12) gilt hierfür

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Im Ruhsystem IS' hat das Myon die Lebensdauer $t_0 = \tau \approx 2 \cdot 10^{-6}\,\text{s}$. Mit $\varepsilon = (c - v)/c$ erhalten wir dann für die in IS gemessene Lebensdauer

$$t_\mu = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{\tau}{\sqrt{2\epsilon}} \geq \frac{h}{v}$$

Damit die Beobachtung auf der Erde möglich ist, muss die Lebensdauer t_μ größer als h/v sein (letzte Bedingung). Damit erhalten wir

$$\epsilon \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\tau\, v}{h}\right)^2 \lesssim \frac{1}{2}\left(\frac{\tau\, c}{h}\right)^2 \approx 2 \cdot 10^{-4}$$

Vom Myon aus gesehen beträgt die Höhe der Atmosphäre

$$h' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, h \approx \sqrt{2\epsilon}\, h \lesssim 600\,\text{m}$$

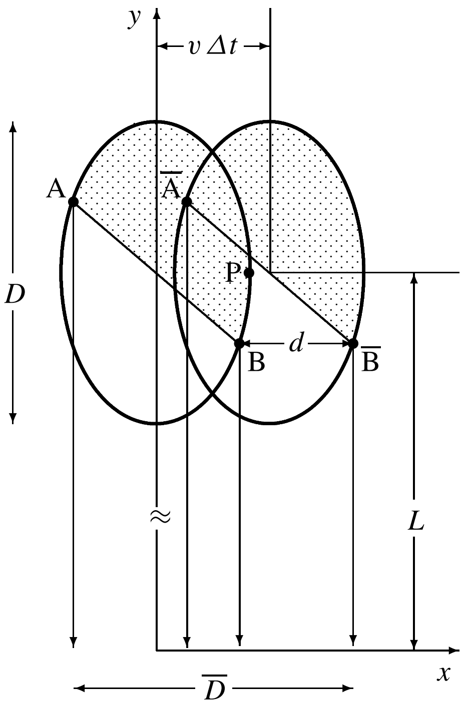
9.4 Momentaufnahme einer vorbeifliegenden Kugel

Ein Körper stellt in seinem Ruhsystem IS$'$ eine Kugel mit dem Durchmesser D dar. Der Körper bewegt sich mit der relativistischen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x$ in einem Inertialsystem IS. Ein IS-Beobachter fotografiert das Objekt. Der Beobachter ist so weit entfernt ($L \to \infty$), dass die ihn erreichenden Lichtstrahlen parallel zur y-Achse (Abbildung unten) sind. Welche Gestalt (Kugel? Ellipsoid?) erscheint auf dem Foto? Welche Teile der Kugel werden abgebildet?

Hinweise: Damit ein Lichtstrahl in IS in $-\boldsymbol{e}_y$-Richtung läuft, muss er im bewegten System IS$'$ unter einem Aberrationswinkel φ_A relativ zur Richtung $-\boldsymbol{e}_{y'} = -\boldsymbol{e}_y$ ausgesandt werden. Nach (14.20) gilt für diesen Winkel:

$$\tan\varphi_\text{A} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \stackrel{!}{=} \frac{dx'}{dy'} \qquad (9.25)$$

In IS$'$ muss dieser Lichtstrahl also die Steigung dy'/dx' haben.



Ein Äquator der mit v bewegten Kugel erscheint wegen der Längenkontraktion in IS als Ellipse. Für die ruhende Kugel wäre P ein gerade noch sichtbarer Punkt des Äquators. Aufgrund der Aberration müsste der Lichtstrahl in IS$'$ aber ins Kugelinnere gerichtet sein, damit er in IS in die Richtung $-\boldsymbol{e}_y$ geht. Der P gegenüberliegende Punkt ist dagegen ohne Weiteres zu sehen. Auf dieser Seite kann man noch weiter sehen: Ein von A tangential nach unten ausgehender Strahl schließt einen bestimmten Winkel mit $-\boldsymbol{e}_{y'}$ ein. Wenn dieser Winkel gleich φ_{A} ist, dann ist A gerade noch sichtbar. Der durch A und B markierte Großkreis trennt die für den IS-Beobachter sichtbaren und unsichtbaren (schraffiert) Teile der Kugel voneinander.

Man berechne die Koordinaten von A und B aus der Ellipsengleichung und aus der Bedingung, dass die Ellipsentangente den Winkel φ_{A} relativ zu $-\boldsymbol{e}_y$ hat.

Der Fotoapparat registriert zu einem bestimmten Zeitpunkt t das Licht von A und B. Wegen der unterschiedlichen Lichtlaufzeiten muss dieses Licht von B zu einer um Δt späteren Zeit abgesandt werden als von A. In dieser Zeit Δt ist die linke Ellipse zur Position der rechten gewandert, und B hat sich nach $\overline{\mathrm{B}}$ bewegt. Auf dem Foto markieren dann A und $\overline{\mathrm{B}}$ den Durchmesser $\overline{D}$ des Objekts.

Lösung: Die Diskussion kann auf den Schnitt mit der Ebene $z = 0$ beschränkt werden (Abbildung), da in z-Richtung keine Längenkontraktion auftritt. Diese Ebene schneidet die Kugel im Äquator $x'^2 + y'^2 = D^2/4$. Durch Längenkontraktion in $\boldsymbol{v}$-Richtung wird dieser Kreis in IS zu der Ellipse

$$\frac{x^2}{1 - v^2/c^2} + \big(y - L\big)^2 = \frac{D^2}{4} \tag{9.26}$$

Diese Ellipse ist in der Abbildung gezeigt. Zur Berechnung der Koordinaten von A und B leiten wir die Ellipsengleichung nach x ab:

$$\frac{x}{1 - v^2/c^2} + \frac{dy}{dx}\,\big(y - L\big) = \frac{x}{1 - v^2/c^2} + \frac{y - L}{v/c} = 0$$

Dabei haben wir $dx/dy = (dx'/dy')/\gamma = v/c$ eingesetzt. Wir lösen nach y auf und verwenden die Ellipsengleichung:

$$x_{\mathrm{A,B}} = \mp\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)\,\frac{D}{2}\,, \qquad\qquad y_{\mathrm{A,B}} = L \pm \frac{v}{c}\,\frac{D}{2}$$

Das obere Vorzeichen gilt für A, mit dem unteren erhält man den entgegengesetzten Punkt B (siehe Abbildung). Beide Punkte markieren den Äquator, von dem gerade noch Licht in Richtung zum Beobachter gesandt werden kann.

Das von B abgesandte Licht hat gegenüber dem von A einen um $\Delta y = (v/c)\,D$ kürzeren Weg. Damit es gleichzeitig beim Beobachter ankommt, muss das Licht von B zu einer um $\Delta t = v\,D/c^2$ späteren Zeit abgesandt werden. Während dieser Zeit rückt B um $d = v\,\Delta t = (v^2/c^2)\,D$ nach $\overline{\mathrm{B}}$, dies ergibt die rechte oben abgebildete Ellipse. Die auf dem Foto registrierte Objektausdehnung in x-Richtung ist demnach

$$\overline{D} = 2\,|x_{\mathrm{A,B}}| + d = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) D + \frac{v^2}{c^2}\,D = D$$

In z-Richtung sieht der Beobachter ebenfalls die Ausdehnung D, da hier weder eine Längenkontraktion noch ein Laufzeitunterschied auftreten. Damit erscheint der sichtbare Rand der Kugel auf dem Foto als Kreis. In diesem Sinn kompensieren sich die Effekte von Längenkontraktion und Aberration, und die Kugel erscheint als Kugel. Der fotografierte Rand ist ein Großkreis der Kugel. Dieser Großkreis aber liegt so, dass der Beobachter einen Teil der Hinterseite der Kugel sieht (und einen Teil der Vorderseite nicht).

9.5 Zeitverschiebung für Satelliten

Ein Satellit (Masse m) bewegt sich auf einer Kreisbahn (Radius r_0) im Gravitationspotenzial

$$V(r) = -\frac{G\,M_{\mathrm{E}}\,m}{r} = m\,\Phi(r) \tag{9.27}$$

Hierbei ist G die Gravitationskonstante und M_{E} die Masse der Erde. Eine Uhr im Satelliten zeigt die Zeit t_{S} an. Eine Uhr, die bei $r = \infty$ ruht, zeigt die Zeit t_∞ an. Bestimmen Sie den Zeitunterschied aufgrund der relativistischen Zeitdilatation in der Form $t_{\mathrm{S}}/t_\infty = 1 + \delta$ in niedrigster, nichtverschwindender Ordnung in v/c. Drücken Sie δ durch $\Phi(r_0)$ aus.

Zusätzlich beeinflusst das Gravitationsfeld den Gang der Uhr:

$$\frac{t_{\mathrm{S}}}{t_\infty} = 1 + \delta + \frac{\Phi(r_0)}{c^2} \tag{9.28}$$

Eine Uhr im Labor auf der Erdoberfläche zeigt die Zeit $t_{\mathrm{L}} \approx t_\infty\,(1 + \Phi(R)/c^2)$ an; die Geschwindigkeit aufgrund der Erddrehung wird vernachlässigt. Bestimmen Sie die relative Zeitverschiebung $(t_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{S}})/t_{\mathrm{L}}$ zwischen Labor und Satellit als Funktion von r_0/R für $\Phi/c^2 \ll 1$. Welche Größenordnung und welches Vorzeichen hat dieser Effekt für einen erdnahen und für einen geostationären (siehe Aufgabe 4.6) Satelliten?

Lösung: Das Produkt $G M_{\mathrm{E}}$ aus der Gravitationskonstanten und der Masse der Erde kann durch die Erdbeschleunigung $g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ und den Erdradius $R \approx 6370\,\mathrm{km}$ ausgedrückt werden. Diesen Zusammenhang erhält man, wenn man das Gewicht $m g$ eines Körpers durch das Gravitationsgesetz ausdrückt, $m g = G m M_{\mathrm{E}}/R^2$. Dies ergibt $G M_{\mathrm{E}} = g R^2$ oder $\Phi(r_0) = -\,g R^2/r_0$.

Die Zeitdilatation für die bewegte Satellitenuhrzeit folgt aus (9.12),

$$\frac{t_{\mathrm{S}}}{t_\infty} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{\Phi(r_0)}{2\,c^2} \quad\Longrightarrow\quad \delta = \frac{\Phi(r_0)}{2\,c^2}$$

Für die Kreisbahn wurde $v^2 = GM_{\mathrm{E}}/r_0 = -\Phi(r_0)$ verwendet. Mit dem Einfluss des Gravitationsfelds wird dies zu

$$\frac{t_{\mathrm{S}}}{t_\infty} \approx 1 + \frac{\Phi(r_0)}{2\,c^2} + \frac{\Phi(r_0)}{c^2} = 1 + \frac{3\,\Phi(r_0)}{2\,c^2} = 1 - \frac{3\,g\,R^2}{2\,r_0\,c^2}$$

Für die Erdlaborzeit gilt

$$\frac{t_{\mathrm{L}}}{t_\infty} \approx 1 + \frac{\Phi(R)}{c^2} = 1 - \frac{g\,R}{c^2}$$

Die Geschwindigkeit der Erdrotation ($u_{\mathrm{rot}} \approx 460\,\mathrm{m/s}$) wird vernachlässigt, denn die Satellitengeschwindigkeit ist mehr als zehnmal so groß. Die relative Zeitverschiebung zwischen Labor und Satellit ist somit

$$\frac{t_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{S}}}{t_{\mathrm{L}}} = 1 - \frac{t_{\mathrm{S}}}{t_{\mathrm{L}}} \approx \frac{g\,R}{c^2}\left(\frac{3\,R}{2\,r_0} - 1\right)$$

Die Skala des Effekts ist durch $g\,R/c^2 \approx 7 \cdot 10^{-7}$ gegeben. Für den erdnahen Satelliten ist $r_0 \approx R$ und $t_{\mathrm{S}} < t_{\mathrm{L}}$; die Uhr des erdnahen Satelliten geht also langsamer. Für den geostationären Satelliten gilt nach Aufgabe 4.6 $r_0 \approx 6.6\,R$. Dann ist $t_{\mathrm{S}} > t_{\mathrm{L}}$; die Uhr des geostationären Satelliten geht schneller. Die Satellitennavigation (GPS, global positioning system) kann nur funktionieren, wenn diese Effekte berücksichtigt werden.

9.6 Levi-Civita-Tensor im Minkowskiraum

Zeigen Sie, dass der Levi-Civita-Tensor ein Pseudotensor 4-ter Stufe ist, also dass

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\det\Lambda)\, \Lambda^{\alpha}_{\ \alpha'}\, \Lambda^{\beta}_{\ \beta'}\, \Lambda^{\gamma}_{\ \gamma'}\, \Lambda^{\delta}_{\ \delta'}\, \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \tag{9.29}$$

gleich $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist.

Lösung: Die Definition der Determinante lautet

$$(\det\Lambda) = \Lambda^{0}_{\ \alpha}\, \Lambda^{1}_{\ \beta}\, \Lambda^{2}_{\ \gamma}\, \Lambda^{3}_{\ \delta}\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Damit werten wir (9.29) aus:

$$\begin{aligned}\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} &= (\det\Lambda)\, \Lambda^{\alpha}_{\ \alpha'}\, \Lambda^{\beta}_{\ \beta'}\, \Lambda^{\gamma}_{\ \gamma'}\, \Lambda^{\delta}_{\ \delta'}\, \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = (\det\Lambda) \begin{vmatrix} \Lambda^{\alpha}_{\ 0} & \Lambda^{\alpha}_{\ 1} & \Lambda^{\alpha}_{\ 2} & \Lambda^{\alpha}_{\ 3} \\ \Lambda^{\beta}_{\ 0} & \Lambda^{\beta}_{\ 1} & \Lambda^{\beta}_{\ 2} & \Lambda^{\beta}_{\ 3} \\ \Lambda^{\gamma}_{\ 0} & \Lambda^{\gamma}_{\ 1} & \Lambda^{\gamma}_{\ 2} & \Lambda^{\gamma}_{\ 3} \\ \Lambda^{\delta}_{\ 0} & \Lambda^{\delta}_{\ 1} & \Lambda^{\delta}_{\ 2} & \Lambda^{\delta}_{\ 3} \end{vmatrix} \\ &= (\det\Lambda)^2\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{aligned}$$

Die Lorentztransformation genügt der Bedingung $\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\,\Lambda = \eta$. Wenn man hiervon die Determinante nimmt, erhält man $\det\Lambda = \pm 1$. Dies wurde im letzten Schritt verwendet.

Die Größe $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ wird zunächst unabhängig von einem Bezugssystem durch konkrete Zahlenzuweisungen definiert. Bei einer Transformation als Pseudotensor erhält man ein damit konsistentes Ergebnis. Daher kann $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ auch als Pseudotensor aufgefasst werden.

9.7 Konstanz von $u^\alpha u_\alpha$

Die Anfangsbedingung für $u^\alpha(0)$ erfüllt die Bedingung $u^\alpha u_\alpha = c^2$. Zeigen Sie, dass dann die Lösung $u^\alpha(\tau)$ der Bewegungsgleichung $m\, du^\alpha/d\tau = F^\alpha$ diese Bedingung ebenfalls erfüllt. Dabei ist die Minkowskikraft

$$\big(F^\alpha\big) = \left(\gamma\, \frac{v\, F_{\mathrm{N}\parallel}}{c},\, \gamma\, \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\parallel} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\perp}\right), \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{9.30}$$

durch die Newtonsche Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ gegeben.

Lösung: Wir leiten $u^\alpha u_\alpha$ nach der Eigenzeit τ ab und verwenden die Bewegungsgleichung:

$$m\, \frac{d}{d\tau}\big(u^\alpha u_\alpha\big) = F^\alpha u_\alpha + u^\alpha F_\alpha = 2\, F^\alpha u_\alpha$$

Hierin setzen wir den Ausdruck für die Minkowskikraft und $(u_\alpha) = \gamma\,(c, -\boldsymbol{v})$ ein:

$$F^\alpha u_\alpha = \gamma^2\, v\, F_{\mathrm{N}\parallel} - \gamma^2\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}\parallel} = 0$$

Wir stellen zusammenfassend fest:

$$\frac{d}{d\tau}\big(u^\alpha u_\alpha\big) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u^\alpha(\tau)\, u_\alpha(\tau) = \text{const.}$$

Damit ist gezeigt, dass $u^\alpha(\tau)\, u_\alpha(\tau)$ eine Erhaltungsgröße ist.

Ergänzende Anmerkung: Im elektromagnetischen Feld lautet die relativistische Bewegungsgleichung $m\, du^\alpha/d\tau = (q/c)\, F^{\alpha\beta} u_\beta$, (13.27). Dabei ist $F^{\alpha\beta}$ der Feldstärketensor (der Buchstabe F wird sowohl für die Minkowskikraft wie für den Feldstärketensor verwendet; die Größen sind jedoch aufgrund der Indizes zu unterscheiden). Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung auf beiden Seiten mit u_α (dies impliziert eine Summation über α):

$$m\, \frac{du^\alpha}{d\tau}\, u_\alpha = \frac{q}{c}\, F^{\alpha\beta} u_\beta\, u_\alpha = 0$$

Dann verschwindet die rechte Seite aufgrund der Antisymmetrie von $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$. Hieraus folgt für die linke Seite $(du^\alpha/d\tau)\, u_\alpha = 0$ und damit die Konstanz von $u^\alpha u_\alpha$.

9.8 Kinetische Energie im Schwerpunkt- und Laborsystem

Die Kollision zweier gleicher Teilchen wird im Laborsystem (LS) und im Schwerpunktsystem (SS) betrachtet:

$$\begin{array}{lll} \text{LS:} & v_1 = V, & v_2 = 0 \\ \text{SS:} & v_1 = v, & v_2 = -v \end{array}$$

Berechnen Sie den exakten Zusammenhang zwischen den beiden zugehörigen kinetischen Energien,

$$K_{\mathrm{LS}} = \frac{m\, c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - m\, c^2, \qquad K_{\mathrm{SS}} = \frac{2\, m\, c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 2\, m\, c^2$$

Lösung: Die Geschwindigkeiten V und v hängen über das Additionstheorem zusammen:

$$V = \frac{v+v}{1+v^2/c^2} \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{1-V^2/c^2} = \frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}$$

Damit formen wir den Ausdruck für die kinetische Energie im Laborsystem um:

$$K_{\mathrm{LS}} = m\,c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - 1\right] = 2\,m\,c^2\,\frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2}$$

Aus dem gegebenen Ausdruck für K_{SS} folgt

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{K_{\mathrm{SS}}\,(K_{\mathrm{SS}} + 4\,m\,c^2)}{(K_{\mathrm{SS}} + 2\,m\,c^2)^2}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen eliminieren wir v^2/c^2,

$$K_{\mathrm{LS}} = \frac{K_{\mathrm{SS}}\,(K_{\mathrm{SS}} + 4\,m\,c^2)}{2\,m\,c^2} \approx \begin{cases} 2\,K_{\mathrm{SS}} & (K_{\mathrm{SS}} \ll m\,c^2) \\[1ex] \dfrac{(K_{\mathrm{SS}})^2}{2\,m\,c^2} & (K_{\mathrm{SS}} \gg m\,c^2) \end{cases} \tag{9.31}$$

9.9 Relativistische Bewegung im elektrischen Feld

Ein Teilchen mit der Ladung q bewegt sich in einem homogenen, konstanten elektrischen Feld $\boldsymbol{E} = E_0\,\boldsymbol{e}_x$. Lösen Sie die relativistischen Bewegungsgleichungen (9.18) für die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0) = 0$ und $\boldsymbol{v}(0) = v_0\,\boldsymbol{e}_y$. Welche Bahnkurve ergibt sich in der x-y-Ebene?

Lösung: Wir schreiben die relativistischen Bewegungsgleichungen (9.18) an:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m\,v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q\,E_0\,, \qquad \frac{d}{dt}\,\frac{m\,v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\,\frac{m\,v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0$$

Wegen der Anfangsbedingung $v_z(0) = 0$ wird die dritte Gleichung durch $v_z(t) = 0$ gelöst. (Eine solche Lösung ist für die zweite Gleichung wegen $v_y(0) \neq 0$ nicht möglich; man beachte, dass der Wurzelfaktor zeitabhängig ist). Die Lösung $v_z(t) = 0$ führt mit der Anfangsbedingung $z(0) = 0$ zur Lösung $z(t) = 0$. Die Bewegung ist also auf die x-y-Ebene beschränkt.

Mit der Anfangsbedingung $\boldsymbol{v}(0) = v_0\,\boldsymbol{e}_y$ erhalten wir dann aus den ersten beiden Bewegungsgleichungen

$$\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q\,E_0}{m}\,t = a\,t\,, \qquad \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}}$$

Hierbei haben wir die konstante Beschleunigung mit $a = q\,E_0/m$ abgekürzt. Zur Bestimmung von v werden die beiden Gleichungen quadriert, addiert und aufgelöst:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma_0^2 + (a\,t/c)^2}\,, \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}}$$

Die Komponenten der Geschwindigkeit sind

$$v_x(t) = \frac{a\,t}{\sqrt{\gamma_0{}^2 + (a\,t/c)^2}} \qquad \text{und} \qquad v_y(t) = \frac{\gamma_0\,v_0}{\sqrt{\gamma_0{}^2 + (a\,t/c)^2}}$$

Für große Zeiten erhalten wir $v_x \to c$ und $v_y \to 0$. Eine weitere Integration mit der Anfangsbedingung $\boldsymbol{r}(0) = 0$ ergibt

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{\gamma_0^2 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - \gamma_0\right], \qquad y(t) = \frac{\gamma_0\,v_0\,c}{a}\,\text{arcsinh}\Big(\frac{a\,t}{\gamma_0\,c}\Big)$$

Wir lösen die zweite Gleichung nach t auf und setzen dies in die erste Gleichung ein:

$$x = \frac{\gamma_0\,m\,c^2}{q\,E_0}\left[\cosh\Big(\frac{q\,E_0\,y}{\gamma_0\,m\,v_0\,c}\Big) - 1\right] \tag{9.32}$$

Dies ist die gesuchte Bahnkurve in der x-y-Ebene; für a wurde wieder $q\,E_0/m$ eingesetzt. Für $q\,E_0\,y \ll \gamma_0\,m\,v_0\,c$ reduziert sich die Bahnkurve auf die (Wurf-)Parabel $x = q\,E_0\,y^2/(2\,\gamma_0\,m\,v_0^2)$.

9.10 Uhrzeit in beschleunigtem System

In einem Inertialsystem IS (mit den Koordinaten t, x, y, z) oszilliert die Position einer Uhr gemäß $\boldsymbol{r}_{\text{Uhr}} = \boldsymbol{e}_x\,a\,\sin(\omega t)$; es gilt $a\,\omega \ll c$. Zur Zeit $t = 0$ wird die Uhr mit einer IS-Uhr (etwa einer Uhr, die bei $\boldsymbol{r} = 0$ ruht) synchronisiert.

Nach einer halben Schwingung ($t = t_0 = \pi/\omega$) ist die bewegte Uhr wieder bei $\boldsymbol{r} = 0$ und wird mit der dort ruhenden Uhr verglichen. Welche Zeitspannen Δt und $\Delta t'$ zeigen die IS-Uhr und die bewegte Uhr an? Berechnen Sie diese Zeitspannen zunächst im IS. Setzen Sie dann eine geeignete Transformation ins Ruhsystem KS$'$ der bewegten Uhr an, und berechnen Sie die Uhrzeiten in diesem System. Die relativistischen Effekte sollen jeweils in führender Ordnung angegeben werden.

Lösung: Die Zeit einer Uhr ist allgemein durch $d\tau = ds_{\text{Uhr}}/c$ gegeben. Dieser Ausdruck ist zunächst im IS und dann in KS$'$ auszuwerten.

Rechnung in IS: In IS folgt aus $d\tau = ds_{\text{Uhr}}/c$ die Uhranzeige

$$\tau = \int_0^{t_0} dt\,\sqrt{1 - v_{\text{Uhr}}^2/c^2}$$

Für die IS-Uhr gilt $v = 0$, also

$$\Delta t = \int_0^{t_0} dt = t_0 = \frac{\pi}{\omega}$$

Für die KS$'$-Uhr gilt $v = a\,\omega\,\cos(\omega t)$, also

$$\Delta t' = \int_0^{t_0} dt\,\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\,\cos^2(\omega t)} \;\approx\; \Big(1 - \frac{a^2\omega^2}{4\,c^2}\Big)\,\frac{\pi}{\omega}$$

Bei der Auswertung des Integrals wurde $a\,\omega \ll c$ verwendet.

Rechnung in KS′: Um $d\tau = ds_{\text{Uhr}}/c$ auszuwerten, muss zunächst das Wegelement in KS′ bestimmt werden. Wir bezeichnen die Koordinaten in KS′ mit t', x', y', z'. Eine mögliche Transformation zwischen IS und KS′ ist

$$t = t', \quad x = x' + a\,\sin(\omega t')\,, \quad y = y', \quad z = z'$$

Damit erhalten wir für das Wegelement (ohne die dy^2- und dz^2-Terme):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = \left(1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\cos^2(\omega t')\right) c^2 dt'^2 - dx'^2 - 2a\omega\cos(\omega t')\,dx'\,dt' \tag{9.33}$$

Die KS′-Uhr ruht in KS′, also $dx' = 0$ und

$$\Delta t' = \frac{1}{c}\int_0^{t_0} dt'\,\sqrt{g_{00}(\boldsymbol{r}_{\text{Uhr}})} = \int_0^{t_0} dt'\,\sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\cos^2(\omega t')} \approx \left(1 - \frac{a^2\omega^2}{4c^2}\right)\frac{\pi}{\omega}$$

Für die IS-Uhr gilt $dx' = -a\omega\,\cos(\omega t')\,dt'$ (folgt aus $dx = 0$). Dies ist in (9.33) einzusetzen und liefert $ds^2 = c^2 dt'^2$, also

$$\Delta t = \int_0^{t_0} dt' = t_0 = \frac{\pi}{\omega}$$

Die richtig berechneten Uhrzeiten hängen natürlich nicht davon ab, in welchem Bezugssystem sie berechnet werden.

9.11 Erhaltungsgrößen der relativistischen Lagrangefunktion

Bestimmen Sie die Erhaltungsgrößen, die aus der Invarianz von

$$\mathcal{L} = -\,mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

gegenüber räumlichen und zeitlichen Verschiebungen folgen.

Lösung: Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ beschreibt ein freies relativistisches Teilchen. Sie ist invariant gegenüber räumlichen Verschiebungen:

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \epsilon\,\boldsymbol{\psi} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{n}\,, \qquad t \to t^* = t + \epsilon\,\varphi \quad \text{mit} \quad \varphi = 0$$

Dabei ist $\boldsymbol{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor. Nach dem Noethertheorem ist die dazugehörige Erhaltungsgröße

$$Q_{\text{raum}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\psi} = \frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\cdot\boldsymbol{n}$$

Da $\boldsymbol{n}$ beliebig ist, folgt hieraus die Impulserhaltung

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{const.}$$

Die Lagrangefunktion ist auch invariant gegenüber Zeitverschiebungen:

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \epsilon\,\boldsymbol{\psi} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\psi} = 0\,, \qquad t \to t^* = t + \epsilon\,\varphi \quad \text{mit} \quad \varphi = 1$$

Die Erhaltungsgröße ist laut Noethertheorem

$$Q_{\text{zeit}} = \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = -m c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - \frac{m v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dies bedeutet Energieerhaltung:

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{const.}$$

9.12 Relativistische Lagrangefunktion für Teilchen im Feld

Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die relativistische Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} - q\, \Phi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \tag{9.34}$$

eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld auf.

Lösung: Aus der Lagrangefunktion folgt der verallgemeinerte Impuls

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q}{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \tag{9.35}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet damit

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q}{c}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right] = -q\, \nabla \Phi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\, \nabla\big(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\big) \tag{9.36}$$

Die totale Zeitableitung des Vektorpotenzials $\boldsymbol{A}$ wird ausgeführt und mit den Termen auf der rechten Seite zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{m \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right] &= -q\left[\nabla \Phi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\right] + \frac{q}{c}\, \boldsymbol{v} \times \big(\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\big) \\ &= q\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\right] \end{aligned} \tag{9.37}$$

Zuletzt wurden die elektromagnetischen Felder $\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi - \partial \boldsymbol{A}/\partial(ct)$ und $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ eingesetzt. Die rechte Seite der Bewegungsgleichung ist die Lorentzkraft.

9.13 Relativistische Hamiltonfunktion für Teilchen im Feld

Leiten Sie die relativistische Hamiltonfunktion $H = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - \mathcal{L}$ aus der Lagrangefunktion (9.34) ab, und geben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an.

Lösung: Aus der Lagrangefunktion (9.34) folgen der verallgemeinerte Impuls (9.35) und

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{m v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q}{c}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$$

Damit bestimmen wir die Hamiltonfunktion:

$$\begin{aligned}
H &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - \mathcal{L} = \frac{m\,v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m\,c^2\,\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} + q\,\Phi(\boldsymbol{r},t) \\
&= \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + q\,\Phi(\boldsymbol{r},t) = c\,\sqrt{m^2c^2 + \Big(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\Big)^2} + q\,\Phi(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}$$

Die dazugehörigen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}\,c - q\,\boldsymbol{A}}{\sqrt{m^2c^2 + (\boldsymbol{p} - q\,\boldsymbol{A}/c)^2}} \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = q\,\frac{(\boldsymbol{p} - q\,\boldsymbol{A}/c)\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \big((\boldsymbol{p} - q\,\boldsymbol{A}/c)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{A}}{\sqrt{m^2c^2 + (\boldsymbol{p} - q\,\boldsymbol{A}/c)^2}} - q\,\nabla\Phi \\
&= \frac{q}{c}\,\big[\,\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}\big] - q\,\nabla\Phi = -\,q\,\nabla\Phi + \frac{q}{c}\,\nabla\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit an; man erhält wieder (9.35). Mit diesem Impuls ist die zweite Gleichung dann äquivalent zur Euler-Lagrange-Gleichung (9.36) oder (9.37).